

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Colloquium 1968

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

onder leiding van

Prof.dr. H.A. Lauwerier.



september 1968.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

Inhoudsopgave.

pag.:

I.	Bepaling van periodieke oplossingen van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen met successieve approximatie.	1
	J. Grasman, M.C. Amsterdam.	
II.	De asymptotische methode van Krylov-Bogoljubov-Mitropolsky.	16
	A.H.P. van der Burgh, T.H. Delft.	
IIIa.	De gegeneraliseerde K.B.M.-methode.	19
IIIb.	Constructies van differentiaalvergelijkingen en de K.B.M.-methode.	25
	J. Grasman.	
IV.	Stabiliteit van oplossingen van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en het bestaan van Lyapunov functies.	31
	J. Grasman.	
V.	De tweede methode van Lyapunov toegepast op het stabiliteitsprobleem bij stelsels partiële differentiaalvergelijkingen.	45
	J.F. Frankena, T.H. Twente.	
VI.	Stabiliteit en continuïteit met betrekking tot twee metrieken.	59
	H. Bavinck, M.C. Amsterdam.	
VII.	Periodieke oplossingen van niet-lineaire, niet-autonome en niet-kritische stelsels van differentiaalvergelijkingen.	73
	M. Strasberg, Université Libre de Bruxelles.	
VIII.	Vervolg van II.	89
	Errata.	99

Colloquium Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

J. Grasman.

I. Bepaling van Periodieke Oplossingen van niet-lineaire Differentiaalvergelijkingen met Successieve Approximatie.

1. Inleiding

Bij de quantitative behandeling van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen hebben zich diverse methoden ontwikkeld.

Wij beschouwen de methode van successieve approximatie volgens Cesari en Hale; de theorie hiervan loopt parallel aan die van de methode van Poincaré en Lindstedt. Laatstgenoemde methode is in de cursus behandeld, blz. 78 t/m 95.

Cesari en Hale gaan uit van het type zwak niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' = f(t, y, \epsilon)$, $f(t, y, \epsilon) = f(t+T, y, \epsilon)$; in de cursus werd het bestaan van een asymptotische ontwikkeling voor de oplossing van $y' = f(t, y, \epsilon)$ bewezen.

Door toepassing van transformaties bij de methode van de successieve approximatie zijn echter vele voorbeelden op te lossen, die juist dienen als toepassing van de methode van Poincaré.

Het is bovendien mogelijk de stabiliteit van oplossingen met successieve approximatie te onderzoeken; men maakt daarbij gebruik van resultaten uit de Floquet-theorie.

Als voorbeeld behandelen wij de Van der Pol vergelijking met een kleine aandrijvende term in het resonantie gebied. Er wordt een periodieke oplossing geconstrueerd en de voorwaarden voor stabiliteit van die oplossing worden bepaald.

Behalve Cesari en Hale hebben ook Gambill en Baily deze methode toegepast.

2. Oplossing door Successieve Approximatie

2.1. Periodiciteits Conditie

Beschouw de vector-functie $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, die voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon q(t, y, \varepsilon),$$

q is een vector met componenten q_j , $j = 1, 2, \dots, n$, q_j is een continue functie in y en ε en is periodiek in t , met periode $T = 2\pi/\omega$. ε is een kleine parameter.

Integratie van (1) levert:

$$(2) \quad y = a + \varepsilon \int_{t_0}^t q(u, y, \varepsilon) du.$$

a is een vector bestaande uit willekeurige constante componenten.

Met de methode van successieve approximatie wordt $y(t)$ benadert door $y^{(m)}(t)$ voor $m \rightarrow \infty$:

$$(3) \quad y^{(m)}(t) = a + \varepsilon \int_{t_0}^t q(u, y^{(m-1)}, \varepsilon) du \quad m = 1, 2, \dots$$

Voor de eerste benadering wordt de oplossing genomen, in het geval dat $\varepsilon = 0$: $y^{(0)} = a$.

De integrand van (3), die periodiek is, stellen wij voor door de reeks

$$(4) \quad I = \sum c_l^{(m-1)} e^{il\omega u}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Als $l = 0$ verkrijgen wij na integratie een term $\varepsilon c^{(m-1)} (t - t_0)$, deze seculiere term wordt verwijderd door de conditie in te voeren

$$(5) \quad c_0^{(m-1)} = 0,$$

hetgeen de periodiciteits conditie genoemd wordt.

In [1] wordt (5) de determining equation genoemd.

Wij geven voor (3) op de volgende wijze aan, dat er geen seculiere term meer in voorkomt:

$$(6) \quad y^{(m)}(t) = a + \varepsilon \int_{t_0}^t \{q(u, y^{(m-1)}, \varepsilon)\}_p du.$$

2.2. Bewijs van Convergentie van de rij functies $y^{(m)}(t)$.

Wij veronderstellen dat er een geschikt gekozen positief getal M bestaat zodanig dat

$$(7) \quad ||q(t, y, \varepsilon)|| \leq M$$

$$(8) \quad ||q(t, y_1, \varepsilon) - q(t, y_2, \varepsilon)|| \leq M \cdot ||y_1 - y_2|| \text{ voor alle } t.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van dezelfde norm definitie als in de cursus: $||y|| = \sum_{i=1}^n |y_i|$.

Er kan bovendien bewezen worden dat

$$||\int_{t_0}^t \{q(u, y, \varepsilon)\}_p du|| \leq \frac{K}{T} \int_0^T ||\{q(u, y, \varepsilon)\}_p|| du.$$

Vergelijking (6) representeren wij door $y^{(m)} = Ly^{(n-1)}$, met L de integraal-operator.

Beschouw de vector $g(t)$ behorende tot de volledige ruimte S van periodieke vectoren (periode T) en $||g(t)|| \leq R$, verder geldt $||a|| \leq r < R$ dan is:

$$||Lg|| \leq ||a|| + \frac{|\varepsilon|K}{T} \int_0^T ||\{q(u, g, \varepsilon)\}_p|| du.$$

$$||Lg|| \leq ||a|| + \frac{|\varepsilon|K}{T} \int_0^T (||q(u, g, \varepsilon)|| + ||c_0||) du,$$

c_0 is de constante term van $q(u, g, \varepsilon)$.

Met (7) volgt:

$$||Lg|| \leq ||a|| + 2|\varepsilon|KM \leq R \text{ voor } |\varepsilon| < \frac{R-r}{2KM}.$$

Hiermee is bewezen dat operator L de ruimte S in zichzelf afbeeldt.

Wanneer wij tenslotte aantonen dat de afbeelding van S op zichzelf een contractie is, dan kan de dekpunt-stelling van Banach toegepast worden.

Men kan concluderen dat er in S een éénduidig bepaalde vector y bestaat, zodanig dat $y = Ly$ en $\|y - y^{(m)}\| \rightarrow 0$ voor $m \rightarrow \infty$, waarbij $y^{(m)} = Ly^{(m-1)}$.

Bewijs van contractie:

Neem y_1, y_2 in S , hiervoor geldt:

$$\|Ly_1 - Ly_2\| \leq \frac{|\varepsilon|K}{T} \int_0^T \|\{q(u, y_1, \varepsilon) - q(u, y_2, \varepsilon)\}_p\| du,$$

$$\|Ly_1 - Ly_2\| \leq \frac{|\varepsilon|K}{T} \int_0^T (\|q(u, y_1, \varepsilon) - q(u, y_2, \varepsilon)\| + \|c_{01} - c_{02}\|) du,$$

c_{01} en c_{02} zijn resp. de constante termen van $q(u, y_1, \varepsilon)$ en $q(u, y_2, \varepsilon)$.

$$\|Ly_1 - Ly_2\| \leq \frac{2|\varepsilon|K}{T} \int_0^T \max \|q(u, y_1, \varepsilon) - q(u, y_2, \varepsilon)\| du,$$

$$(9) \quad \max \|Ly_1 - Ly_2\| \leq 2|\varepsilon|KM \max \|y_1 - y_2\|.$$

Voor $|\varepsilon| < \frac{1}{2KM}$ is er contractie.

2.3. Nauwkeurigheid.

Uit het voorgaande kan men de nauwkeurigheid van de benadering $y^{(m)}(t)$ bepalen. Uit (9) volgt:

$$\max \|y - y^{(m)}\| \leq 2KM \cdot \max \|y - y^{(m-1)}\| \cdot |\varepsilon|,$$

herhaalde toepassing van deze formule geeft:

$$\max \|y - y^{(m)}\| \leq (2KM)^m \cdot \max \|y - y^{(0)}\| \cdot |\varepsilon|^m.$$

$$\max \|y - y^{(0)}\| \leq 2R. \text{ Wij kunnen concluderen}$$

$$y(t) = y^{(m)}(t) + O(\varepsilon^m).$$

2.4. Toepassing van de methode

Wij kunnen de voorgaande methode ook toepassen voor een differentiaalvergelijking van het type:

$$(10) \quad \frac{dy}{dt} = Ay + \varepsilon f(t, y, \varepsilon),$$

y en f zijn vectoren met componenten $y_j, f_j, j = 1, 2, \dots, n$.

$f_j(t, y, \varepsilon)$ is continu in y en ε en periodiek in t , $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

A is een constante $n \times n$ -matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & \rho_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & \rho_n \end{pmatrix}$$

$$\rho_j = i\tau_j + 0(\varepsilon), \quad \tau_j = \pm \omega.$$

Het is mogelijk de methode toe te passen voor

$\tau_j = \omega \cdot k_j / m_j$ met $k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ en

$m_j = 1, 2, 3, \dots$ men krijgt dan subharmonische

periodieke oplossingen ($k_j = \pm 1, m_j > 1$) of ultra-

harmonische periodieke oplossingen ($|k_j| > 1, m_j = 1$).

Een derde mogelijkheid is een ultra-subharmonische oplossing ($k_j \neq \pm 1, m_j \neq 1$).

Er wordt een matrix B gedefinieerd als A , doch nu met $i\tau_j$ op de diagonaal. (10) wordt

$$(11) \quad \frac{dy}{dt} = By + \varepsilon g(t, y, \varepsilon), \quad \varepsilon g_i = \varepsilon f_i + (\rho_i - i\tau_i)y_i.$$

Door substitutie van $y_j = z_j e^{i\tau_j t}$ (of $y = z e^{Bt}$) in (11) verkrijgen wij:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Q(t, z, \varepsilon), \quad Q(t, z, \varepsilon) = e^{-Bt} g(t, e^{Bt} z, \varepsilon).$$

$Q(t, z, \varepsilon)$ voldoet aan dezelfde voorwaarden als $q(t, y, \varepsilon)$ in (1).

Overeenkomstig sectie 2.1 vinden wij met successieve approximatie:

$$(12) \quad y^{(0)} = e^{Bt} a,$$

$$(13) \quad y^{(m)} = e^{Bt} a + \varepsilon e^{Bt} \int_{t_0}^t \{e^{-Bu} g(u, y^{(m-1)}, \varepsilon)\}_p du, \quad m = 1, 2, \dots$$

2.5. Voorbeeld.

De in sectie 2.4 behandelde differentiaalvergelijking is tot diverse bekende typen niet-lineaire differentiaalvergelijkingen te herleiden. Als voorbeeld wordt de inhomogene Van der Pol vergelijking met aandrijvende term in het resonantie gebied behandeld:

$$(14) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + \varepsilon p \sin \omega t.$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \varepsilon \lambda, \text{ hiermee wordt de vergelijking}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon \left\{ (1 - y^2) \frac{dy}{dt} + \lambda y + p \sin \omega t \right\}.$$

Er worden nieuwe coördinaten x_1 en x_2 gedefinieerd (volgens Van der Pol):

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2i\omega}, \quad y' = \frac{x_1 - x_2}{2},$$

hetgeen een stelsel 1e orde differentiaalvergelijkingen levert:

$$(15a) \quad \frac{dx_1}{dt} = i\omega x_1 + \varepsilon f, \quad f = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4\omega^2} (x_1 + x_2)^2 \right\} (x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{2i\omega} (x_1 + x_2) + p \sin \omega t,$$

$$(15b) \quad \frac{dx_2}{dt} = -i\omega x_2 - \varepsilon f.$$

In deze vorm hebben wij een stelsel als (11); (12) en (13) voor $m = 1$ worden:

$$(16) \quad x_1^{(0)} = a e^{i\omega t}, \quad x_2^{(0)} = b e^{-i\omega t}, \quad a \text{ en } b \text{ zijn complex; } a = -\bar{b}.$$

$$x_1^{(1)} = a e^{i\omega t} + \varepsilon e^{i\omega t} \int_{t_0}^t \{ e^{-i\omega u} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, u) \}_p du,$$

$$x_2^{(1)} = b e^{-i\omega t} - \varepsilon e^{-i\omega t} \int_{t_0}^t \{ e^{i\omega u} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, u) \}_p du.$$

In deze formules betekent $\{ e^{\pm i\omega u} f \}_p$, dat $I = e^{\pm i\omega u} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, u)$ na substitutie van (16) in een ontwikkeling als (4) gebracht wordt en dat aan (5) voldaan moet worden.

De periodiciteitsconditie (5) geeft voor a en b :

$$(17a) \quad \left(a + \frac{a^2 b}{4\omega^2}\right)i - \frac{a\lambda}{\omega} - p = 0$$

$$(17b) \quad \left(b + \frac{ab^2}{4\omega^2}\right)i + \frac{b\lambda}{\omega} - p = 0.$$

Dit voorbeeld is ook in de cursus behandeld (blz. 104), toen echter diende het als toepassing bij de Van der Pol-methode.

3. Stabiliteit en de Methode van Successieve Approximatie

3.1. Inleiding

Het stabiliteits onderzoek met deze methode zal beperkt blijven tot het voorbeeld van sectie 2.5. Voor de behandeling van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in het algemeen met deze methode wordt verwezen naar [2].

Alvorens de stabiliteits voorwaarden voor dit probleem uit te werken, vermelden wij andere mogelijkheden om dit te behandelen.

a. zie cursus (blz. 104 t/m 107).

Zoals reeds vermeld is, werd in de cursus vergelijking (14) opgelost met de Van der Pol-methode.

Er wordt gesteld

$$y = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = -a(t)\omega \sin \omega t + b(t)\omega \cos \omega t.$$

Substitutie in (14) geeft voor $a(t)$ en $b(t)$ het stelsel:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon f(a, b, t), \quad \frac{db}{dt} = \varepsilon g(a, b, t),$$

De periodieke oplossing verkrijgt men door f en g , die periodiek in t zijn, in een fourier-ontwikkeling te plaatsen en in de eerste benadering de eerste termen van beide ontwikkelingen nul te stellen.

Aldus vindt men $y = a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t$.

De stabiliteit wordt onderzocht door een storing aan te brengen

$$a = a_0 + \bar{a}(t), \quad b = b_0 + \bar{b}(t).$$

$\bar{a}(t)$ en $\bar{b}(t)$ komen voor in een stelsel, waarvan de gelineariseerde differentiaalvergelijkingen constante coëfficiënten bevatten. Oplossing van de gelineariseerde vergelijkingen geeft ook uitsluitsel omtrent de stabiliteit van de storingen in $\bar{a} = \bar{b} = 0$.

- b. Een andere methode bestaat uit het introduceren van een storing in (15): $x_j = x_j^* + \xi_j$, $j = 1, 2$ en x_j^* voldoet aan (15). Dit geeft voor de storingstermen ξ_j een stelsel, waarvan de gelineariseerde differentiaalvergelijkingen periodieke coëfficiënten bevatten. De stabiliteit kan onderzocht worden door toepassing van de Floquet-theorie. Moeilijkheid echter is de bepaling van de basisvectoren, die de oplossing van het gelineariseerde stelsel vormen.
- c. Zoals wij het probleem hierna uitwerken, komt het erop neer dat wij voor de in punt b. genoemde storingstermen schrijven: $\xi_j = e^{\varepsilon \beta t} \cdot p_j$. Met de Floquet-theorie wordt bewezen dat p_j periodiek in t is; als $\beta < 0$ dan is de storing in $\xi_1 = \xi_2 = 0$ asymptotisch stabiel.

3.2. Voorbeeld.

Overeenkomstig 3.1b voldoen de storingstermen ξ_j aan

$$(18a) \quad \frac{d\xi_1}{dt} = i\omega\xi_1 + \varepsilon g, \quad g = f(x_1^* + \xi_1, x_2^* + \xi_2) - f(x_1^*, x_2^*),$$

$$(18b) \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -i\omega\xi_2 - \varepsilon g.$$

Bepaling van lineaire deel der rechterleden

$$\begin{aligned} f(x_1^* + \xi_1, x_2^* + \xi_2) &= f(x_1^*, x_2^*) + \left\{ \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}_{x_j=x_j^*} f(x_1, x_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}_{x_j=x_j^*}^2 f(x_1, x_2) + \dots \end{aligned}$$

$$g = g_1 + g_r,$$

$$g_1 = \left\{ \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}_{x_j=x_j^*} f(x_1, x_2), \quad g_r = \frac{1}{2} \left\{ \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^2 f(x_1, x_2) + \dots$$

Er geldt

$$\lim_{||\xi|| \rightarrow 0} \frac{||g_r||}{||\xi||} = 0,$$

hieruit volgt dat, indien het gelineariseerde stelsel asymptotisch stabiel is in de oorsprong ook (18) dit is, zie stelling in sectie 4.4. Voor de storingstermen, die voldoen aan het gelineariseerde stelsel:

$$(19a) \quad \frac{d\xi_1}{dt} = i\omega\xi_1 + \varepsilon g_1,$$

$$(19b) \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -i\omega\xi_2 - \varepsilon g_1,$$

stellen wij $\xi_j = e^{\varepsilon\beta t} p_j$ waarbij p_j een periodieke functie in t is, zie sectie 4.3. Voor p_j geeft dit

$$(20a) \quad \frac{dp_1}{dt} = i\omega p_1 + \varepsilon(g_1 e^{-\varepsilon\beta t} - \beta p_1),$$

$$(20b) \quad \frac{dp_2}{dt} = -i\omega p_2 - \varepsilon(g_1 e^{-\varepsilon\beta t} + \beta p_2).$$

Volgens (12) en (13) voor $m = 1$:

$$p_1^{(0)} = c_1 e^{i\omega t}, \quad p_2^{(0)} = c_2 e^{-i\omega t}.$$

$$(21a) \quad p_1^{(1)} = c_1 e^{i\omega t} + \varepsilon e^{i\omega t} \int_{t_0}^t \{ e^{-i\omega u} (p_1^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_j}^* + \\ + p_2^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_j}^* - \beta p_1^{(0)}) \}_p du,$$

$$(21b) \quad p_2^{(1)} = c_2 e^{-i\omega t} - \varepsilon e^{-i\omega t} \int_{t_0}^t \{ e^{+i\omega u} (p_1^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_j}^* + \\ + p_2^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_j}^* + \beta p_2^{(0)}) \}_p du.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4\omega^2} (x_1 + x_2)^2 \right\} + \frac{1}{4\omega^2} (x_1^2 - x_2^2) + \frac{\lambda}{2i\omega}$$

Er kan volstaan worden met $x_j^{(0)}$ te substitueren in (21) in plaats van x_j^* .

Voorwaarde (5) geeft voor (21):

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{ab}{4\omega^2} + \frac{\lambda}{2i\omega} - \beta\right)c_1 + \frac{a^2}{8\omega^2}c_2 = 0,$$

$$-\frac{b^2}{8\omega^2}c_1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{ab}{4\omega^2} + \frac{\lambda}{2i\omega} + \beta\right)c_2 = 0.$$

Dit homogene stelsel vergelijkingen in c_1 en c_2 bezit een niet-triviale oplossing, als de determinant is nul:

$$(22) \quad \beta^2 - \left(1 + \frac{ab}{2\omega^2}\right)\beta - \frac{a^2b^2}{64\omega^4} + \frac{\lambda^2}{4\omega^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{ab}{4\omega^2}\right)^2 = 0$$

$a = -\bar{b}$, zodat ab is reëel en daarmee alle termen van (22).

Het stelsel (19) is asymptotisch stabiel in de oorsprong als $\text{Re}(\beta_1)$ en $\text{Re}(\beta_2)$ negatief zijn (β_1, β_2 zijn de wortels van (22)).

Als β_1 en β_2 toegevoegd complex zijn moet

$$\left(1 + \frac{ab}{2\omega^2}\right) < 0.$$

Als β_1 en β_2 reëel zijn moet

$$\left(1 + \frac{ab}{2\omega^2}\right) < 0 \quad \text{en} \quad -\frac{a^2b^2}{64\omega^4} + \frac{\lambda^2}{4\omega^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{ab}{4\omega^2}\right)^2 > 0$$

In (21) was gesubstitueerd $x_j^* = x_j^{(0)}$ er geldt echter $x_j^* = x_j^{(0)} + O(\varepsilon)$. Daar β_1 en β_2 continue functies in ε zijn, zullen voor ε voldoende klein $\text{Re}(\beta_1)$ en $\text{Re}(\beta_2)$ negatief blijven, indien men voor x_j^* een waarde substitueert die $O(\varepsilon)$ verschilt.

Opmerking: De verkregen resultaten stemmen overéén met die van de cursus (blz. 107): $y = a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t$.

Wij stelden $y = \frac{a}{2\omega i} e^{i\omega t} + \frac{b}{2\omega i} e^{-i\omega t}$, zodat

$$a_0 = \frac{1}{2i\omega} (a + b), \quad b_0 = \frac{1}{2\omega} (a - b), \quad k = -\frac{ab}{\omega^2}$$

4. Floquet-theorie

4.1. Basis Oplossingen

Om de voorgaande methode te plaatsen in het geheel van de theorie der niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is het wenselijk om de Floquet-theorie kort weer te geven, mede omdat van enkele resultaten uit de theorie gebruik is gemaakt.

Voor een vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ geldt:

$$(23) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad a_{ij}(t+T) = a_{ij}(t).$$

Hiervan is $\phi_j(t) = (\phi_{1j}, \phi_{2j}, \dots, \phi_{nj})$ $j = 1, 2, \dots, n$ een stelsel onafhankelijke oplossingen.

Definieer $\psi_j(t) = \phi_j(t+T)$, $j = 1, 2, \dots, n$, dan is ψ_j te schrijven als

$$\psi_j(t) = \sum_{k=1}^n b_{jk} \phi_k(t) \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$\psi_j(t)$ is te stellen als een nieuwe oplossings basis, omdat $\psi_j(0) = \phi_j(T)$ onafhankelijk gekozen beginwaarden zijn.

4.2. Stabiliteit

Wij trachten een oplossing $x(t)$ te vinden, zodanig dat

$$(24) \quad x(t+T) = \mu x(t).$$

Afhankelijk van de waarde der karakteristieke factor μ kunnen wij conclusies trekken ten aanzien van stabiliteit.

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(t)$$

$$x(t+T) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(t) = \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j=1}^n b_{kj} \phi_j(t)$$

Met (24) komen wij tot de relatie:

$$(25) \quad \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_k b_{kj} - \mu c_j \right) \phi_j(t) = 0.$$

Daar $\phi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, een onafhankelijke basis vormt, kan (25) alleen gelden als

$$\sum_{k=1}^n c_k b_{kj} - \mu c_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{of} \quad (b_{11} - \mu)c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n = 0$$

$$b_{12}c_1 + (b_{22} - \mu)c_2 + \dots + b_{n2}c_n = 0$$

(26)

$$b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + (b_{nn} - \mu)c_n = 0.$$

$x(t)$ bezit een niet-triviale oplossing als de determinant van (26) nul is, deze voorwaarde levert n karakteristieke factoren μ_p , $p = 1, 2, \dots, n$. Indien $|\mu_p| \leq 1$, $p = 1, 2, \dots, n$, dan is de oplossing stabiel in de zin van Liapunoff.

Indien voor zekere p geldt $|\mu_p| > 1$ dan is de oplossing instabiel.

4.3. Periodieke Deel der Oplossing

Wij stellen de oplossing, die voor $\mu = \mu_p$ aan (24) voldoet voor door

$$\phi_p(t + T) = \mu_p \phi_p(t), \quad \phi_p = (\phi_{1p}, \phi_{2p}, \dots, \phi_{np}).$$

Beschouwen wij de functie

$$f_p(t) = \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \mu_p\right) \phi_p(t)$$

dan geldt

$$f_p(t + T) = \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \mu_p\right) \cdot \exp(-\ln \mu_p) \phi_p(t + T),$$

$$f_p(t + T) = \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \mu_p\right) \cdot \frac{1}{\mu_p} \phi_p(t + T) = f_p(t).$$

Hiermee is aangetoond dat de oplossing $\phi_p(t)$ de vorm heeft

$$\phi_p(t) = f_p(t) e^{h_p t},$$

waarin $f_p(t)$ een periodieke functie is; $h_p = \frac{1}{T} \ln \mu_p$ heet de karakteristieke exponent.

4.4. Stelling:

Zij

$$(27) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(x, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ en}$$

$$a_{ij}(t + T) = a_{ij}(t), \text{ terwijl } \frac{||f(x, t)||}{||x||} \rightarrow 0 \text{ als } ||x|| \rightarrow 0.$$

Als voor
$$\frac{dx_i^{(0)}}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j^{(0)} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$x^{(0)}(t)$ asymptotisch stabiel is in de oorsprong, dan geldt dit ook voor $x(t)$.

Bewijs:

Volgens 4.3 kan een oplossing van (23) voorgesteld worden door

$$x^{(0)}(t) = \sum_{p=1}^n c_p \phi_p(t) \text{ met } \phi_p(t) = e^{h_p t} f_p(t),$$

$f_p(t)$ is periodiek en vanwege asymptotische stabiliteit is $h_p < 0$

$p = 1, 2, \dots, n$, $h = \max_p h_p$.

Wij bepalen voor $x^{(0)}(t)$ een nieuwe basis $\phi_j(t)$ $j = 1, 2, \dots, n$, en definiëren de $n \times n$ -matrix Φ zodanig dat de j^e kolom de vector $\phi_j(t)$ voorstelt:

$$\phi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \phi_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \phi_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{nn} \end{pmatrix}$$

Dit heeft tot gevolg dat $\phi(0)$ de eenheids matrix is.

$\{\phi_{ij}\}$ wordt een fundamenteel systeem genoemd (vergelijk cursus blz. 53 als a_{ij} is const.).

De oplossing van (27) is voor te stellen door

$$(28) \quad x_i(t) = \sum_{p=1}^n c_p \phi_{ip}(t) + \int_0^t \sum_{p=1}^n f_p(x(\tau), \tau) \phi_{ip}(t - \tau) d\tau$$

of in vector vorm

$$x(t) = c \cdot \phi(t) + \int_0^t f(x(\tau), \tau) \cdot \phi(t - \tau) d\tau;$$

$$(29) \quad ||x(t)|| \leq ||c|| ||\phi(t)|| + \int_0^t ||f(x(\tau), \tau)|| \cdot ||\phi(t - \tau)|| d\tau.$$

De volgende afschattingen kunnen gemaakt worden:

$$||\phi(t)|| \leq k e^{ht}, \quad ||\Phi(t)|| \leq k e^{ht} \quad \text{voor geschikt gekozen } k,$$

bovendien bestaat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$, zodanig dat

$$||f(x(\tau), \tau)|| \leq \frac{\varepsilon}{k} ||x(\tau)|| \quad \text{voor} \quad ||x(\tau)|| \leq \delta.$$

Hiermee verkrijgen wij in plaats van (29) de ongelijkheid

$$||x(t)|| e^{-ht} \leq ||c|| \cdot k + \varepsilon \int_0^t e^{-h\tau} ||x(\tau)|| d\tau.$$

Toepassing van het lemma van Gronwall:

$$||x(t)|| \leq k ||c|| e^{(h+\varepsilon)t}.$$

Voor ε voldoende klein is $h + \varepsilon < 0$ en is (27) asymptotisch stabiel in de oorsprong.

Toepassing:

Voor $n = 2$ geeft substitutie van

$$x_1 = \xi_1 e^{-i\omega t}$$

$$x_2 = \xi_2 e^{i\omega t}$$

in (27):

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= i\omega\xi_1 + a_{11}(t)\xi_1 + a_{12}(t)\xi_2 + f_1(\xi, t), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -i\omega\xi_2 + a_{21}(t)\xi_1 + a_{22}(t)\xi_2 + f_2(\xi, t),\end{aligned}$$

hetgeen met (18) overeenkomt.

Literatuur

- [1] L. Cesari, Asympt. Behaviour and Stab. Problems in Ordinary Diff. Eq. 1963, Springer-Verlag, (uitsluitend 2e editie)
- [2] H.R. Baily and R.A. Gambill, On Stab. of period. solutions of Non-Lin. Diff. Eq: 1957, J. of Math. and Mech. vol. 6 blz. 655.
- [3] N. Minorsky, Non-Lin. Oscillations. 1962, Van Nostrand.
- [4] M. Roseau, Vibrations Non-Lin. et theorie de la Stab. 1966, Springer-Verlag.
- [5] W. Eckhaus, Cursus Niet-Lin. Diff. Vergel. 1967, Math. Centrum.

II. De Asymptotische Methode van Krylov-Bogoljubov-Mitropolski

A.H.P. van der Burgh

Samenvatting

Wij beschouwen de vectordifferentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (1)$$

$$t = 0; x = x_0$$

waarin x en X punten van de E_n zijn.

Daarnaast beschouwen wij het geassocieerde autonome systeem:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (2)$$

$$t = 0; \xi = x_0$$

waarin:

$$X_0(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(\tau, \xi) d\tau \quad (3)$$

gelijkmatig voor $\xi \in D$ (D is een gesloten gebied van de E_n). Voor willekeurige punten x , x' en x'' uit D bestaan positieve konstanten M en λ zodanig dat voor alle reële $t \geq 0$ geldt:

$$||X(t, x)|| \leq M, \quad ||X(t, x') - X(t, x'')|| \leq \lambda ||x' - x''||.$$

Stelling: (Bogoljubov-Mitropolski)

Zij $\xi \in D$ een oplossing van (2) en $x \in D$ een oplossing van (1). Bij willekeurig kleine positieve η en willekeurig grote L bestaat een positieve ε_0 zodanig dat voor $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ in het interval $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ geldt:

$$||x - \xi|| < \eta.$$

η is dus een functie van ε waarvoor geldt:

$$\eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ voor } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Stelling: (Roseau)

Zij $X(t, x)$ periodiek in t met periode T en continu differentieerbaar in x .

Er geldt nu:

$$||x - \xi|| \leq \epsilon C(L),$$

voor $\epsilon t \leq L$. $C(L)$ is een konstante die alleen van L afhangt.

ξ is de eerste asymptotische benadering van x . Voor de konstruktie van de tweede asymptotische benadering in het periodieke geval voeren wij de volgende functies in:

$$X_1(t, x) = X(t, x) - X_0(x)$$

$$\tilde{X}_1(t, x) = \int_0^t X_1(\tau, x) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T ds \int_0^S \{X_1(\tau, x) - X_1(\tau, x_0)\} d\tau.$$

Nu beschouwen wij het geassocieerde systeem:

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon X_0(\xi) + \epsilon^2 \frac{1}{T} \int_0^T (X(\tau, \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}) X(\tau, \xi) d\tau. \quad (4)$$

Stelling: (Besjes)

Zij $X(t, x)$ periodiek in t met periode T en continu differentieerbaar in x . Als ξ oplossing is van (4) en $z = \xi + \epsilon \tilde{X}(t, \xi)$ dan geldt:

$$||x - z|| \leq \epsilon^2 C(L)$$

voor $\epsilon t < L$. $C(L)$ is een konstante die alleen van L afhangt.

Stelling: (Bogoljubov-Mitropolski, Roseau, Urabe)

Zij $X(t, x)$ periodiek in t met periode T en continu differentieerbaar in x . Stel er bestaat een vector ξ_0 waarvoor geldt: $X_0(\xi_0) = 0$.

(1) heeft nu voor voldoende kleine ϵ een unieke periodieke oplossing met periode T die gelijkmatig voor t naar a gaat als $\epsilon \rightarrow 0$ mits $\det X_{0\xi}(\xi_0) \neq 0$.

Als alle eigenwaarden van de matrix $X_{0\xi}(\xi_0)$ een negatief reëel deel hebben is deze periodieke oplossing asymptotisch stabiel. Als een der eigenwaarden een positief reëel deel heeft is de periodieke oplossing instabiel.

Voorbeeld:

De differentiaalvergelijking, die de beweging beschrijft van een spreekspoel van een luidspreker in een lineair afnemend radiaal magnetisch veld luidt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon \cos(2t)x = 0.$$

1e approximatie volgens K-B-M met als praktische waarde voor ϵ -0,32:

$$\begin{aligned} \bar{x} = & A[\sin 0,113t - 0,04 \sin 2,113t + 0,04 \sin 1,887t] + \\ & + B[\cos 0,113t - 0,04 \cos 2,113t - 0,04 \cos 1,887t]. \end{aligned}$$

McLachlan geeft als oplossing:

$$\begin{aligned} \bar{x} = & A[\sin 0,114t - 0,036 \sin 2,114t + 0,045 \sin 1,886t] + \\ & + B[\cos 0,114t - 0,036 \cos 2,114t - 0,045 \cos 1,886t]. \end{aligned}$$

Vervolg op pag. 89.

Colloquium Niet Lineaire Differentiaal-vergelijkingen

J. Grasman.

IIIa. De Gegeneraliseerde K.B.M. methode.

1. Inleiding.

Wij gaan uit van een stelsel differentiaalvergelijkingen, waarop de K.B.M. methode van toepassing is, zie (1a) en (1b).

In [1] wordt dit het probleem van de snel-roterende phase genoemd, waarbij in (1b) $\omega^{(0)} = \omega^{(0)}(x)$.

Het is ook mogelijk de K.B.M.-methode toe te passen indien $\omega^{(0)} = \omega^{(0)}(x, \psi)$. Voor dat geval wordt gebruik gemaakt van een aangepast geassocieerd systeem.

Wij beschouwen het stelsel

$$(1a) \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon G_i^{(1)}(x, \psi) + \varepsilon^2 G_i^{(2)}(x, \psi) + \dots \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(1b) \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega^{(0)} + \varepsilon \omega^{(1)}(x, \psi) + \dots$$

Voor $k = 1, 2, \dots$ zijn $G_i^{(k)}(x, \psi)$ en $\omega^{(k)}(x, \psi)$ periodiek in ψ (periode τ), $0 < \varepsilon \ll 1$.

Bij de gebruikelijke methode is $\omega^{(0)} = \omega^{(0)}(x)$:

Het geassocieerde systeem bestaat uit de volgende formele ontwikkelingen, die verkregen zijn na integratie over één periode van de hoekvariabele in het rechterlid:

$$(2a) \quad \frac{dy_i}{dt} = \varepsilon T_i^{(1)}(y) + \varepsilon^2 T_i^{(2)}(y) + \dots,$$

$$(2b) \quad \frac{d\chi}{dt} = \omega^{(0)}(y) + \varepsilon V^{(1)}(y) + \dots$$

Wij stellen

$$(3a) \quad x_i = y_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(y, \chi) + \varepsilon^2 \eta_i^{(2)}(y, \chi) + \dots \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3b) \quad \psi = \chi + \varepsilon u^{(1)}(y, \chi) + \varepsilon^2 u^{(2)}(y, \chi) + \dots$$

Substitutie van (3) in (1) geeft met gebruikmaking van (2), na gelijkstelling van coëfficiënten van gelijke machten in ε uitdrukkingen voor $\eta_i^{(k)}(y, \chi)$ en $u^{(k)}(y, \chi)$. Deze termen dienen aan de periodiciteitsconditie te voldoen. Hierdoor worden $T_i^{(k)}(y)$ en $V^{(k)}(y)$ bepaald en daarmee ook y en χ .

Indien $\omega^{(0)} = \omega^{(0)}(x, \psi)$, zal in vele gevallen voorgaande methode toch toegepast kunnen worden door een nieuwe hoekvariabele θ te introduceren (zie [2]):

$$(4) \quad \theta = \int_0^\psi \Gamma(x, \phi) \frac{d\phi}{\gamma(x)}, \quad \Gamma(x, \psi) = \frac{1}{\omega^{(0)}(x, \psi)}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Gamma(x, \psi) d\psi.$$

Het is echter niet altijd mogelijk ψ als functie van θ te schrijven en in (1) te substitueren.

2. Gegeneraliseerde Methode.

In (2) bestaat het rechterlid uit termen die over ψ gemiddeld zijn. Na invoering van θ wordt over deze variabele geïntegreerd en θ komt daarom niet in het rechterlid voor.

Het idee is nu in de geassocieerde vergelijking (2b) θ niet expliciet in te voeren:

$$(2b') \quad \frac{d}{dt} \left(\int_0^x \Gamma(y, \phi) \frac{d\phi}{\gamma(y)} [1 + \varepsilon W^{(1)}(y) + \dots] \right).$$

De bepaling van $\eta_i^{(k)}$ en $u^{(k)}$ uit (1), (2ab') en (3) geschiedt op dezelfde wijze als bij de K.B.M.-methode.

(2b') wordt na differentiatie van linkerlid:

$$(2b'') \quad \frac{d\chi}{dt} = \omega^{(0)}(y, \chi) \{1 + \varepsilon W^{(1)}(y) + \dots\} -$$

$$\gamma(y) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \int_0^x \Gamma(y, \phi) \frac{d\phi}{\gamma(y)} \right\} \{ \varepsilon T_i^{(1)}(y) + \varepsilon^2 T_i^{(2)}(y) + \dots \}.$$

Substitutie van (3) in (1) geeft:

$$(5a) \quad \frac{dy_i}{dt} + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} \right] + \dots = \varepsilon G_i^{(1)}(y, \chi) + \dots$$

$$(5b) \quad \frac{d\chi}{dt} + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} \right] + \dots = \omega^{(0)}(y, \chi) + \\ + \varepsilon \left\{ \omega^{(1)}(y, \chi) + \sum_{k=1}^n \eta_k^{(1)}(y, \chi) \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial y_k} + u^{(1)}(y, \chi) \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial \chi} \right\} + \dots$$

Met (2a) en (2b'') verkrijgt men bij gelijkstelling van de coëfficiënten van ε in (5a):

$$(6a) \quad T_i^{(1)}(y) + \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \chi} \omega^{(0)}(y, \chi) = G_i^{(1)}(y, \chi)$$

en uit (5b) volgt

$$(6b) \quad \omega^{(0)}(y, \chi) \cdot W^{(1)}(y) - \gamma(y) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \int_0^\chi \Gamma(y, \phi) \frac{d\phi}{\gamma(y)} \right\} T_i^{(1)}(y) + \\ + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \chi} \omega^{(0)}(y, \chi) = \omega^{(1)}(y, \chi) + \sum_{i=1}^n \eta_i^{(1)}(y, \chi) \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial y_i} + \\ + u^{(1)}(y, \chi) \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial \chi}.$$

Uit (6a) blijkt

$$(7) \quad \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \chi} = \Gamma(y, \chi) \{ G_i^{(1)}(y, \chi) - T_i^{(1)}(y) \},$$

$\eta_i(y, \chi)$ moet voldoen aan de periodiciteitsvoorwaarde, dan is ook (7) periodiek in χ . Wanneer het rechterlid van (7) in een Fourier-ontwikkeling gebracht wordt dan dient de eerste term nul te zijn (anders seculiere term na integratie):

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Gamma(y, \chi) G_i^{(1)}(y, \chi) d\chi = T_i^{(1)}(y) \cdot \gamma(y),$$

hiermee is $T_i^{(1)}(y)$ bepaald.

$\eta_i^{(1)}(y, \chi) = \bar{\eta}_i(y, \chi) + q_i^{(1)}(y)$, met $q_i^{(1)}(y)$ een willekeurige functie
 en $\bar{\eta}_i^{(1)}(y, \chi) = \int_0^\chi \Gamma(y, \phi) \{G_i^{(1)}(y, \phi) - T_i(y)\} d\phi$.

Evenzo:

$u^{(1)}(y, \chi) = \bar{u}^{(1)}(y, \chi) + p^{(1)}(y)$, $p^{(1)}(y)$ willekeurig en $\bar{u}^{(1)}(y, \chi)$ uit (6b).

Voor de eerste orde benaderingen van y_i en χ gelden de vergelijkingen:

$$(8a) \quad \frac{dy_i}{dt} = \epsilon T_i^{(1)}(y),$$

$$(8b) \quad \frac{d\chi}{dt} = \omega^{(0)}(y, \chi).$$

$p^{(1)}(y)$ en $q_i^{(1)}(y)$ zijn willekeurige functies, doch zij zijn niet van zodanige aard dat zij ons een extra vrijheid verschaffen.

Het is een gevolg van het feit dat in (8) y_i en χ tot op $O(\epsilon)$ bepaald zijn. Bij een tweede orde benadering vervalt deze vrijheid en komen er willekeurige functies $p^{(2)}(y)$ en $g_i^{(2)}(y)$ in resp. $u^{(2)}(y)$ en $\eta_i^{(2)}(y)$.

3. De licht-gedempte slinger.

Als toepassing behandelen wij het probleem van de lichtgedempte slinger voor grote uitwijkingen. In [2] is de K.B.M. methode gebruikt door na transformatie van de hoek variabele zoals in de inleiding aangegeven is. Deze transformatie leidt tot gecompliceerde berekeningen, met de generaliseerde methode kunnen deze vermeden worden.

De bewegingsvergelijking luidt:

$$(9) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \sin 2\xi + \epsilon \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Er wordt gesteld: $\sin \xi = k \sin \psi$, $0 < k < 1$,

$$\frac{d\xi}{dt} = k \cos \psi,$$

zodat het stelsel (9) overgaat in:

$$(10a) \quad \frac{dk}{dt} = -\epsilon k \cos^2 \psi,$$

$$(10b) \quad \frac{d\psi}{dt} = (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} + \epsilon \sin \psi \cos \psi.$$

In termen van de gegeneraliseerde methode:

$$G^{(1)}(k, \psi) = -k \cos^2 \psi, \quad G^{(m)}(k, \psi) = 0,$$

$$\omega^{(0)}(k, \psi) = (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega^{(1)}(k, \psi) = \sin \psi \cos \psi, \quad \omega^{(m)}(k, \psi) = 0 \\ m = 2, 3, \dots$$

Het rechterlid heeft een periode π , vanwege de symmetrie is het voldoende om over een halve periode te middelen:

$$\gamma(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - y^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{1}{2}} d\chi = \frac{2}{\pi} K(y)$$

$$T^{(1)}(y) = \frac{-2y}{\pi} \gamma^{-1}(y) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \chi (1 - y^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{1}{2}} d\chi.$$

$$T^{(1)}(y) = \frac{2y^{-1}}{\pi} \gamma^{-1}(y) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y^2) - (1-y^2 \sin^2 \chi)}{(1-y^2 \sin^2 \chi)^{\frac{1}{2}}} d\chi,$$

$$(11) \quad T^{(1)}(y) = \frac{1}{yK(y)} \{ (1-y^2) K(y) - E(y) \},$$

In deze vorm zijn $K(y)$ en $E(y)$ volledige elliptische integralen van resp. 1e en 2e soort.

Zij voldoen aan de volgende betrekkingen:

$$yE'(y) = E(y) - K(y) \quad \text{of} \quad K'(y) = -y E''(y) \quad \text{en}$$

$$y(1-y^2) E''(y) + (1-y^2) E'(y) + yE(y) = 0.$$

Hiermee kan afgeleid worden dat voor $P(y) = E(y) - (1-y^2) K(y)$ geldt:

$$\frac{dP(y)}{dy} = yK(y).$$

Uit (8ab) en (11) volgt:

$$(12a) \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{P(y)}{P'(y)}, \quad \text{zodat } P(y) = Ce^{-\epsilon t} \text{ en}$$

$$(12b) \quad \frac{dx}{dt} = (1-y^2 \sin^2 \chi)^{\frac{1}{2}},$$

$\bar{n}^{(1)}(y, \chi)$ en $\bar{u}^{(1)}(y, \chi)$ kunnen bepaald worden.

Voor de tweede benadering blijkt: $T^{(2)}(y) = 0$ en $W^{(1)}(y) = 0$.

Dit betekent dat y in (12a) met een nauwkeurigheid $O(\epsilon^2)$ bepaald wordt en χ is volgens (2b''):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{K(y, \chi)}{K(y)} \right\} = \frac{1}{K(y)} + O(\epsilon^2),$$

$K(y, \chi)$ is een onvolledige elliptische integraal van de eerste soort.

[1] N.N. Bogolinbov & Y.A. Mitropolsky.

Asympt. Methods in the Theory of Nonlin. Oscillations, 1961,
Gordon & Breach, New York.

[2] W.A. Coppel.

On the Eq. of a Synchr. Motor.

Quant. J. Mech. Appl. Math. vol. 12 (1959) blz. 242-256.

[3] J.A. Morrison.

A Generalized Method of Averaging, with Appl. to Slightly Damped
Nonlin. Oscillations.

J. Math. Anal. and Appl., vol. 15 (1966) blz. 213-227.

IIIb. Constructies van differentiaalvergelijkingen en de K.B.M. methode

1. Inleiding

Het is noodzakelijk gebleken buiten de theorie van de oplossing van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, ook de problematiek van de constructie van vergelijkingen aan de orde te stellen.

In sectie 2 zal een systeem behandeld worden, waarvan de oscillerende oplossing bekend is en waarvan gegeven is dat het voldoet aan een 2e orde differentiaal vergelijking. De vergelijking zal dan volledig bepaald worden.

Een ander probleem omvat het onderzoek in hoeverre een niet-lineaire differentiaal vergelijking door een lineaire vervangen kan worden, zodanig dat de eerste benaderingen van de oplossingen van beide vergelijkingen overéénkomen.

In de praktijk kan het voordelen bieden om in een keten van lineaire systemen een eventueel aanwezig niet-lineair systeem door een lineair voor te stellen, om op deze wijze één algemene behandeling van alle systemen mogelijk te maken.

In sectie 3 zal voor een niet-lineaire differentiaalvergelijking een equivalente gelineariseerde geconstrueerd worden.

2. Het Inverse Probleem.

Wij onderstellen dat een systeem voldoet aan de volgende differentiaal vergelijking:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x + k(x) = 0,$$

waarbij $f(x)$ een even functie en $k(x)$ een oneven functie is, doch verder zijn deze functies onbekend. Het is niet nodig dat zij van een zekere grootte-orde in een kleine parameter zijn, zoals het bij de K.B.M.-methode verondersteld wordt.

Wel is verder bekend dat de functie

$$(2) \quad x(t) = A(t) \sin \psi(t), \quad \psi(t) = \omega t + \phi(t)$$

met $A(t)$ en $\psi(t)$ gegeven, voldoet aan (1), terwijl

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = A(t) \cos \psi(t).$$

Uit (2) en (3) volgt de betrekking

$$(4) \quad \frac{dA}{dt} \sin \psi + A \left(\frac{d\psi}{dt} - \omega \right) \cos \psi = 0.$$

Het probleem omvat de bepaling van de functies $f(x)$ en $k(x)$ bij deze gegevens. Hiertoe formeert men volgens de K.B.M. methode een stelsel differentiaal vergelijkingen voor $\frac{dA}{dt}$ en $\frac{d\psi}{dt}$; door (2) en (3) in (1) te substitueren verkrijgt men met gebruikmaking van (4):

$$(5a) \quad \frac{d(A^2)}{dt} = -2A^2 f(A \sin \psi) \cos^2 \psi - \frac{2A}{\omega} k(A \sin \psi) \cos \psi,$$

$$(5b) \quad A^2 \omega \left(\frac{d\psi}{dt} - \omega \right) = A^2 \omega f(A \sin \psi) \cos \psi \sin \psi + A k(A \sin \psi) \sin \psi.$$

Bij de K.B.M. methode wordt het rechterlid geapproximeerd door middeling over een periode. Er kan bewezen worden dat de eerste term van de asymptotische oplossing aan deze "gemiddelde" vergelijking voldoet. In dit geval vervolgen wij op een andere wijze, daar nu het linkerlid bekende functies bevat.

Integratie over een periode geeft, omdat $k(x)$ een oneven- en $f(x)$ een even functie is:

$$(6a) \quad F(A^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d(A^2)}{dt} d\psi = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 f(A \sin \psi) \cos^2 \psi d\psi$$

$$(6b) \quad K(A^2) = \frac{A^2 \omega}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{d\psi}{dt} - \omega \right\} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} A k(A \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

Wij merken op dat de vergelijkingen (6a) en (6b) gelden met betrekking tot de exacte oplossing (3), er zijn geen approximaties gemaakt.

(6a) en (6b) vormen twee integraalvergelijkingen voor resp. $f(A \sin \psi)$ en $k(A \sin \psi)$.

Beschouwt men de integraalvergelijking van Abel voor een onbekende functie $f(y)$:

$$g(z) = \int_0^z (z-y)^{-\alpha} f(y) dy, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$(7) \quad \text{oplossing: } f(z) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} g(t) dt,$$

dan verkrijgen wij door de transformaties:

$A^2 = z$, $z \sin^2 \psi = y$, eenzelfde type integraalvergelijkingen.

$$F'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^z F'(z) (z-y)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

$$K(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^z k(y^{\frac{1}{2}}) (z-y)^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Volgens (7) volgt dan uit (6a) en (6b)

$$f(z^{\frac{1}{2}}) = -z^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \int_0^z F(y) (z-y)^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$k(z^{\frac{1}{2}}) = \frac{d}{dz} \int_0^z K(y) (z-y)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

3. Equivalente Gelineariseerde Differentiaalvergelijkingen.

Een niet-lineair oscillerend systeem wordt gerepresenteerd door de differentiaalvergelijking:

$$(8) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}),$$

m en k zijn gegeven constanten $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Volgens de K.B.M. methode is de eerste benadering

$$(9) \quad x(t) = a(t) \cos \psi(t),$$

waarbij $a(t)$ en $\psi(t)$ voldoen aan

$$(10a) \quad \frac{da}{dt} = \frac{-\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi,$$

$$(10b) \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_e(a),$$

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.$$

Wij introduceren de volgende functies:

$$(10a) \quad \lambda_e(a) = \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi,$$

$$(11b) \quad k_e(a) = k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi,$$

hierdoor is het mogelijk (10) te schrijven als

$$(12a) \quad \frac{da}{dt} = \frac{-\lambda_e(a)}{2m} a,$$

$$(12b) \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_e(a), \quad \omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m}.$$

Met gebruikmaking van (12) kan voor de eerste afgeleide van (9) geschreven worden:

$$\frac{dx}{dt} = -a \omega_e(a) \sin \psi - \frac{\lambda_e(a)}{2m} a \cos \psi;$$

nogmaals differentieren geeft een uitdrukking voor $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Na rangschikking van de termen komen wij tot de differentiaalvergelijking:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a)x = O(\varepsilon^2).$$

Conclusie: de eerste benadering (9) van vergelijking (8) voldoet aan

$$(13) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a)x = 0$$

met een nauwkeurigheid $O(\varepsilon^2)$.

Wanneer het door omstandigheden (zie inleiding) voordelig is om een lineair systeem te beschouwen dan bepalen wij eerst, λ_e , k_e en onderzoeken het lineaire systeem (13) door de volgende differentiaalvergelijkingen op te lossen (zoals in de lineaire theorie gebruikelijk):

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\delta \cdot a, & \frac{d\psi}{dt} &= \omega \\ \delta &= \frac{\lambda_e}{2m}, & \omega &= \frac{k_e(a)}{m}.\end{aligned}$$

Hetgeen overeenstemt met de vergelijkingen voor de eerste benadering volgens (10).

Het komt erop neer dat in (8) de term $F = \epsilon f$ vervangen is door $F_e = -\{k_e(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt}\}$.

De formules voor $k_e(a)$ en $\lambda_e(a)$ in (11) komen als het ware uit de lucht vallen, na de invoering ervan wordt het geheel formeel uitgewerkt, waaraan mathematisch geen bezwaren verbonden zijn.

Een fysische interpretatie zal verduidelijkend werken, mede ook doordat dan het middelings principe op de voorgrond treedt.

Indien (8) en (13) mechanische systemen voorstellen en wij nemen aan dat de gemiddelde arbeid per periode afkomstig van resp. de termen F en F_e dezelfde is, dan geldt:

$$\epsilon \oint f(x, \frac{dx}{dt}) dx = -\lambda_e(a) \oint \frac{dx}{dt} dx - k_e(a) \oint x dx.$$

De laatste term geeft geen bijdrage omdat de uiteindelijke verplaatsing over één periode nul is.

Met de tijd als integratie variabele:

$$(14) \quad \epsilon \int_0^T f(x, \frac{dx}{dt}) \frac{dx}{dt} dt = -\lambda_e(a) \int_0^T (\frac{dx}{dt})^2 dt.$$

In de eerste benadering is

$$(15) \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t),$$

substitutie in (14) geeft (11a).

Ook voor (11b) bestaat er een fysische achtergrond; in de electrotechniek bestaat analoog aan de verrichte arbeid volgens (14):

$$W = \int_0^T F \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T U(t) \cdot i(t) dt$$

een arbeid verricht door de "reactie" kracht, hierin wordt de stroomsterkte $i(t)$ genomen op een tijdstip, dat een kwart periode achter ligt op dat van de spanning $U(t)$:

$$W_r = \int_0^T U(t) \cdot i(t - \frac{T}{4}) dt.$$

In termen van dit probleem:

$$\varepsilon \int_0^T f(x, \frac{dx}{dt}) \frac{d}{dt} x(t - \frac{T}{4}) dt = - \int_0^T \{k, (a) x(t) + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt}\} \frac{dx}{dt} (t-T) dt$$

Met (15) geeft dit (11b).

Literatuur

- [1] N.V. Bogoliubov & Y.A. Mitropolsky.
Asympt. Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations,
Gordon & Breach, 1961.
- [2] Minorsky.
Nonlinear Oscillations.
Van Nostrand, 1962.
- [3] M. Tobak.
An Inverse Problem for a Class of Nonlinear Diff. Eq.
J. of Math. Anal. and Appl. v. 15 (1966) p. 330.

Colloquium Niet-Lineaire Differentiaalvergelijkingen

J. Grasman

Stabiliteit van oplossingen van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en het bestaan van Lyapunov functies

1. Inleiding.

Er zijn bij het onderzoek van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen diverse definities van stabiliteit in gebruik geraakt. In de cursus waren gedefinieerd: stabiliteit in de zin van Lyapunov en asymptotische stabiliteit. Doch er zijn ook andere definities in omloop, om er enkele te noemen: praktische-, lagrange- en equi-asymptotische stabiliteit. Het is in het algemeen aan te raden deze verzameling van definities, ter voorkoming van begripsverwarring, beperkt te houden. In het volgende echter zullen wij ons toch genoodzaakt zien een andere stabiliteitsindeling te maken.

In deze colloquium bijdrage zal de directe methode van Lyapunov behandeld worden. Deze methode omvat het onderzoek van stabiliteit bij een differentiaalvergelijking van het type

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad f_i(t, 0) = 0,$$

hiertoe zoekt men een continue functie $V(t, x)$ met $V(t, x) > 0$ voor $x \neq 0$ en $V(t, 0) = 0$.

Indien $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \leq 0$, dan is $x = 0$ stabiel in de zin van Lyapunov.

Voor voorbeelden en stellingen wordt verwezen naar de cursus.

De keuze van de functie $V(t, x)$ is in vele gevallen tamelijk willekeurig. Bij fysische systemen kan als Lyapunov functie de bijbehorende energie functie gebruikt worden.

Door o.a. Zubov is 'n theorie ontwikkeld die een constructieve methode van Lyapunov-functies geeft, doch ook hier komt een keuze van functies aan de orde, die zich niet in een methode laat vastleggen. Aan de hand van werk van Strauss [1] en Hahn [3] zal het probleem nu van een andere kant benaderd worden. Uitgaande van het feit dat men de oplossing be-

kend stelt, tracht men een bijbehorende Lyapunov-functie te bepalen. In deze opzet veronderstelt men dat de oplossing $x(t)$ aan de volgende voorwaarde voldoet, opdat de constructie van een Lyapunov-functie mogelijk is:

$$(a) \quad \int_{t_0}^{\infty} k(x(t)) dt < \infty \quad (k \text{ is een nog nader te bepalen functie}).$$

Met behulp van deze conditie wordt een nieuw type stabiliteit geïntroduceerd. Ook in fysische toepassingen speelt een Lyapunov-functie waarbij aan voorwaarde (a) voldaan wordt de rol van energie-functie, zie [4] en [5].

2. Stabiliteit volgens Strauss.

Wij beschouwen de vector $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ waarvoor

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad ||x|| \leq M.$$

Zij $F(t, t_0, x_0)$ diè oplossing van (1) waarvoor $F(t_0, t_0, x_0) = x_0$, dan voert men de volgende definities voor stabiliteit en Lyapunov-functies in.

2.1. Voor (1) is $x = 0$ L^P -stabiël als $x = 0$ is stabiël in de zin van Lyapunov en als er voor elke $t_0 \geq 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle x_0 met $||x_0|| \leq \delta$ geldt:

$$(2) \quad \int_{t_0}^{\infty} ||F(t, t_0, x_0)||^p dt < \infty.$$

2.2. Voor (1) is $x = 0$ uniform L^P -stabiël als $x = 0$ L^P -stabiël is en als voor alle x_0 met $||x_0|| \leq M$, er een omgeving bestaat, zodanig dat (2) uniform convergeert binnen deze omgeving.

2.3. $V(t, x)$ is een Lyapunov-functie als

a. $V(t, 0) = 0$ voor $t \geq 0$.

b. $V(t, x)$ is positief definit voor $||x|| > 0$.

c. $V(t, x)$ is Lipschitz continu in een omgeving van (t_0, x_0) .

d. $V(t, x)$ is continu voor $||x|| \geq 0$.

2.4. Stelling

Als $V(t, x)$ een Lyapunov-functie is van (1), zodanig dat

$\dot{V}(t, x) \leq -c ||x||^p$ voor zekere $c, p > 0$, dan is $x = 0$ L^p -stabil voor (1).

Opmerking: $\dot{V}(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sup \frac{V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)}{h}$,

als $V(t, x)$ differentieerbaar is voor $t \geq 0, ||x|| \geq 0$

dan geldt $\dot{V}(t, x) = \frac{dV}{dt}(t, x)$.

Bewijs

Uit de directe methode van Lyapunov volgt dat $x = 0$ stabil in de zin van Lyapunov is voor (1).

Definieer:

$$\gamma(t) = V(t, F(t, t_0, x_0)) + c \int_{t_0}^t |F(s, t_0, x_0)|^p ds,$$

neem t vast en bepaal

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sup \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}, \text{ er volgt}$$

$$\dot{\gamma}(t) \leq \dot{V}(t, x) + c ||x||^p \leq 0.$$

Daar $\gamma(t_0) = V(t_0, x_0)$, verkrijgen wij de ongelijkheid:

$$0 \leq V(t, x) \leq -c \int_{t_0}^t |F(s, t_0, x_0)|^p ds + V(t_0, x_0), \text{ daar } \gamma(t)$$

een niet-toenemende functie is.

Voor $t \rightarrow \infty$ geldt

$$\int_{t_0}^{\infty} |F(s, t_0, x_0)|^p ds \leq \frac{1}{c} V(t_0, x_0).$$

2.5. Voorbeeld

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{g(t)} x \quad (x \text{ scalair}).$$

$$\text{Oplossing} \quad x = F(t, t_0, x_0) = \frac{x_0}{g(t_0)} \cdot g(t).$$

Als $g(t) = \frac{1}{\log(t+2)}$ dan is voor geen enkele $p > 0$ (2) geldig.

In dit geval is er geen L^p -stabiliteit, doch voor $x = 0$ is het stelsel wel asymptotisch stabil.

Als $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4(t-n)^2}$ dan is voor $p > \frac{1}{2}$ (2) geldig.

De reeks is uniform convergent, zodat term voor term geïntegreerd kan worden (zie [2]). Het stelsel is stabiel in de zin van Lyapunov

omdat $g(t) < 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ zodat $x = 0$ is L^p -stabiel.

$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ bestaat niet er is geen asymptotische stabiliteit.

Conclusie L^p -stabiliteit en asymptotische stabiliteit sluiten elkaar niet in!

2.6a. Stelling.

Als in (1) $f(t, x)$ en $f_x(t, x)$ continu zijn voor $\|x\| \leq M$ en $x = 0$ is uniform L^p -stabiel en als voor de matrix Φ met

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{0j}}(t, t_0, x_0) \text{ geldt } \|\Phi(t+t_0, t_0, x_0)\| \leq \psi(t), \text{ waar-}$$

bij $\psi(t)$ aan dezelfde voorwaarde (2) als $F(t)$ voldoet voor

$0 < \delta \leq \|x\| \leq M$. Dan bestaat er een Lyapunov-functie $V(t, x)$ met $\dot{V}(t, x) = -\|x\|^p$.

Bewijs:

$$\text{Definieer } V(t, x) = \int_t^{\infty} \|F(s, t, x)\|^p ds = \int_0^{\infty} \|F(s+t, t, x)\|^p ds.$$

Vanwege de uniforme L^p -stabiliteit is $V(t, x)$ continu in t en x , $V(t, 0) = 0$.

$$V(t, F(t, t_0, x_0)) = \int_t^{\infty} \|F(s, t, F(t, t_0, x_0))\|^p ds = \int_t^{\infty} \|F(s, t_0, x_0)\|^p ds$$

$$\text{zodat } \frac{d}{dt} V(t, x) = -\|F(t, t_0, x_0)\|^p.$$

Wij tonen aan dat $V(t, x)$ Lipschitz-continu is:

Kies een open convexe omgeving $N(x, t)$ van (t_0, x_0) met $0 < \|x\| < M$.

Voor $x_1, x_2 \in N$ geldt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \|F(s+t, t, x_1)\|^p - \|F(s+t, t, x_2)\|^p \right| ds \leq \\ \int_0^{\infty} p \{ \|F(s+t, t, x_1)\|^{p-1} + \|F(s+t, t, x_2)\|^{p-1} \} \cdot \|F(s+t, t, x_1) - \\ - F(s+t, t, x_2)\| ds. \end{aligned}$$

De middelwaardenstelling luidt voor dit geval:

$$||F(s+t, t, x_1)|| - ||F(s+t, t, x_2)|| = ||\phi(s+t, t, z)|| \cdot ||x_1 - x_2||,$$

waarbij $x_{1i} < z_i < x_{2i}$ of $x_{1i} > z_i > x_{2i}$ voor $i = 1, 2, \dots, n$.

Als $k = \sup_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \int_0^\infty ||F(s+t, t, x)||^{p-1} \psi(s) ds \right\}$ dan blijkt:

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq 2pk ||x_1 - x_2||.$$

Tenslotte wordt bewezen dat $V(t, x)$ positief definitief is voor $||x|| > 0$:

$$F(s+t, t, x) = x + \int_t^{t+s} f(u, F(u, t, x)) du.$$

Stel $||f(t, x)|| \leq K$ voor $t \geq t_0$ en $||x|| \leq M$ dan is

$$||F(s+t, t, x) - x|| \leq Ks.$$

Indien $0 \leq s \leq \frac{||x||}{2K}$ dan is $||F(s+t, t, x)|| \geq \frac{1}{2} ||x||$.

$$V(t, x) \geq \int_0^{\frac{||x||}{2K}} ||F(s+t, t, x)||^p ds \geq \frac{1}{4K} ||x||^{p+1}.$$

Hiermee voldoet $V(t, x)$ aan de gestelde eisen voor een Lyapunov-functie.

Voorbeeld:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 x_2$$

$$x_1 = F_1(t_1 t_0, x_0) = \frac{x_{01}}{(t-t_0)x_{02}+1}$$

oplossing:

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2^2, \quad x_2 \geq 0.$$

$$x_2 = F_2(t_1 t_0, x_0) = \frac{x_{02}}{(t-t_0)x_{02}+1}$$

$$\sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} \left| \frac{\partial}{\partial x_{0i}} F_j(t+t_0, t_0, x_0) \right| \leq \frac{1+M(1-t+t_0)}{\{\delta(t-t_0)+1\}^2} + \frac{1}{\delta(t-t_0)+1} = \psi(t)$$

voor $0 < \delta \leq |x_{0i}| \leq M$.

Het stelsel is in $x = 0$ L^p -stabiel met $p > 1$.

Dan bestaat er de Lyapunov-functie $V(t, x)$:

$$V(t, x) = \int_t^\infty \frac{||x||^p}{\{(s-t)x_2+1\}^p} ds = \frac{||x||^p}{(p-1)x_2}, \text{ terwijl}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{p}{p-1} \frac{||x||^{p-1} \text{sign}(x_1)}{x_2} \cdot (-x_1 x_2) +$$

$$+ \left\{ \frac{p}{p-1} \frac{||x||^{p-1}}{x_2} + \frac{-||x||^p}{(p-1)x_2^2} \right\} (-x_2^2) = -||x||^p.$$

Als $f(x, t) = A(t)x$ geldt er een stelling van het type 2.6a onder zwakkere condities.

2.6b. Stelling

Als in $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ met $A(t)$ een continue matrix, $x = 0$ L^p -stabiël is, dan bestaat er een Lyapunov-functie $V(t, x)$ met $V(t, x) \leq -||x||^p$.

Als toepassing van het voorgaande kan er de volgende stelling bewezen worden.

2.7. Stelling

Als

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t, x), \quad g(t, 0) \equiv 0$$

en $x = 0$ is L^p -stabiël voor het stelsel $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, dan is $x = 0$ ook L^p -stabiël voor (3), indien $||X^{-1}(t)||^p \cdot ||g(t, x)|| \cdot ||x||^{-1} \rightarrow 0$ uniform in $0 \leq t < \infty$ als $||x|| \rightarrow 0$.

Schets van bewijs:

$X(t)$ is de fundamentele matrix van gelineariseerde systeem, waarbij volgens 2.6b een Lyapunov-functie bepaald kan worden.

Vervolgens wordt aangetoond dat deze functie ook een Lyapunov-functie voor (3) is met $V(t, x) \leq -c||x||^p$, zodat men met 2.4 verkrijgt dat de triviale oplossing van (3) ook L^p -stabiël is, onder genoemde voorwaarde.

Voorbeeld

$$\frac{dx_1}{dt} = -tx_1$$

(4)

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{t+1} x_2 + x_1^2 t e^{-t^n}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t+1} \end{pmatrix} \text{ is de fundamentele matrix van gelineariseerd}$$

probleem.

Hiervoor geldt L^p -stabiliteit in $x = 0$ voor $p > 1$ ($t_0 > 0$).

$$R(t, x) = ||X^{-1}(t)||^p \cdot ||g(t, x)|| \cdot ||x||^{-1} = (e^{+\frac{1}{2}t^2} + 1 + t)^p \frac{x_1^2 e^{-t^n}}{\{|x_1| + |x_2|\}}$$

$R(t, x) \rightarrow 0$ uniform in t voor $||x|| \rightarrow 0$, indien $n > 2$.

In dat geval is ook (4) L^p -stabiel ($p > 1$) voor $x = 0$.

3. Stabiliteit volgens Hahn.

In plaats van de integraal (2) te beschouwen, definieert Hahn [3] de integraal:

$$q(t, x_0, t_0) = \int_{t_0}^t k(||F(u, x_0, t_0)||) du$$

met $k(r)$ een nog nader te bepalen functie.

Definities:

- 3.1. $\phi(r) \in K$, waarbij K de klasse is van continue functies $\phi(r)$, waarvoor $\phi(r)$ monotoom-stijgend is voor $0 \leq r \leq \infty$, $\phi(0) = 0$.
- 3.2. $\sigma(s) \in L$, waarbij L de klasse is van continue functies $\sigma(s)$, waarvoor $\sigma(s)$ monotoom-dalend is voor $0 \leq s_1 \leq s < \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = 0$.
- 3.3. Als $Q(x_0, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t, x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} k(||F(u, x_0, t_0)||) dt < \infty$, $k \in K$, dan heeft (1) een k -gedrag.
- 3.4. Als $q(t, x_0, t_0) \leq \phi_0(||x_0||)$, met t_0 vast dan is $x = 0$ k -stabiel voor (1) ($\phi_0 \in K$).

3.5. Stelling

Als $x = 0$ stabiel is in de zin van Lyapunov voor (1) en 3.3. is uniform convergent voor $0 \leq ||x_0|| \leq M$, dan is $x = 0$ k -stabiel.

Bewijs:

Stel $Q(x_0, t_0) = Q_1(x_0, t_0) + Q_2(x_0, t_0)$,

$$Q_1(x_0, t_0) = \int_{t_0}^T k(||F(u, x_0, t_0)||) du, \quad Q_2(x_0, t_0) = \int_T^{\infty} k(||F(u, x_0, t_0)||) du.$$

Als het stelsel stabiel is in de zin van Lyapunov betekent dit

$$||F(t, x_0, t_0)|| \leq \phi_1(||x_0||) \quad \text{met} \quad \phi_1 \in K \quad \text{voor} \quad t \geq t_0.$$

Er geldt omdat $k \in K$: $k(\phi_1(||x_0||)) \leq \phi_2(||x_0||)$, ($\phi_2 \in K$) zodat

$$Q_1 \leq \phi_2(||x_0||)(T - t_0).$$

Voor een gegeven ε bestaat er een δ , zodanig dat $Q \leq \frac{\varepsilon}{2}$, als $||x_0|| < \delta$.
Er bestaat ook een T_1 , zodanig dat $Q_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ voor $T \geq T_1$, vanwege uniforme convergentie van 3.3. $Q(t_0, x_0) < \varepsilon$ bij een vaste $t_0 \geq 0$ voor $||x_0|| \leq \delta$, hetgeen overeenkomt met 3.4.

3.6. Stelling

Als $x = 0$ asymptotisch stabiel is voor (1), dan is $x = 0$ ook k -stabiel bij een geschikt gekozen k -functie.

Er wordt een functie $k(||F(t, x_0, t_0)||)$ geïntroduceerd ($k \in K$).
Men kan bewijzen dat er altijd een functie $k \in K$ bestaat, zodat (1) k -stabiel is in $x = 0$. In 3.9 zal in een speciaal geval het bewijs geleverd worden.

Uit deze stelling blijkt het voordeel van de stabiliteitsdefinitie van Hahn boven die van Strauss (waarbij asymptotische stabiliteit nog geen L^p -stabiliteit in hield).

De volgende stellingen lopen parallel aan die in sectie 2 zijn afgeleid.

3.7. Stelling (vergelijk 2.4).

Als $V(t, x)$ een Lyapunov-functie is van (1), zodanig dat $\dot{V}(t, x) \leq -k(||x||)$ voor een geschikte functie $k \in K$ dan heeft (1) een k -gedrag.

Bewijs:

$V(t_0, x_0) - q(t, x_0, t_0) \geq V(t, x) > 0$, zodat $|q(t, x_0, t_0)| < V(t_0, x_0)$.
Voor $t \rightarrow \infty$ verkrijgt men 3.3.

3.8. Stelling (vergelijk 2.6).

Als (1) een k -gedrag heeft, dan bestaat er een Lyapunov-functie zodanig dat $\dot{V}(t, x) = -k(||x||)$.

Bewijs:

Stel $V(t, x) = Q(x, t)$, langs een baankromme geldt:

$$\begin{aligned} Q(F(t, x_0, t_0), t) &= \int_{t_0}^{\infty} k(||F(s, F(t, x_0, t_0), t)||) ds = \\ &= \int_t^{\infty} k(||F(u, x_0, t_0)||) du. \end{aligned}$$

$$\dot{V}(t, x) = \dot{V}(t, F(t, x_0, t_0)) = \frac{dQ}{dt} = -k(||F(t, x_0, t_0)||) = -k(||x||).$$

3.9. Voorbeeld

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{g(t)} x, \quad x \text{ scalair}, \quad g(t) > 0, \quad \max_{0 < t < \infty} g(t) = L, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

$$\text{Oplossing: } x = F(t, x_0, t_0) = \frac{x_0}{g(t_0)} g(t), \quad ||x_0|| \leq M.$$

Er is een asymptotische stabiliteit: er zal aangetoond worden dat (5) ook k -stabil is.

$$q(t, x_0, t_0) = \int_{t_0}^t k \left\{ \frac{|x_0|}{g(t_0)} g(u) \right\} du \quad \text{met } k \in K.$$

Men kan deze k -functie als volgt schatten:

$$k \left(\frac{|x_0|}{g(t_0)} g(u) \right) \leq k_1(|x_0|) \cdot k_2(g(u)), \quad k_1, k_2 \in K.$$

$$\text{Kies namelijk } k_1(|x_0|) = \left[k \left\{ |x_0| \cdot \frac{L}{g(t_0)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k_2(g(u)) = \left[k \left\{ \frac{M}{g(t_0)} g(u) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$q(t, x_0, t_0) \leq k_1(x_0) \int_{t_0}^t k_2(g(u)) du.$$

Er bestaat een continue functie $p(t)$ met de eigenschappen

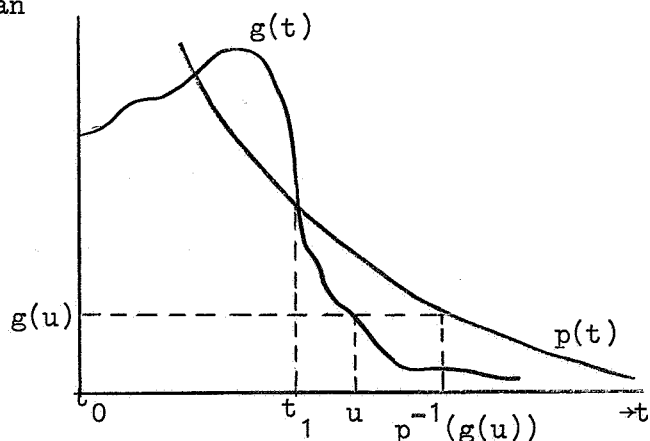
1. $p(t) \geq g(t)$ voor $t \geq t_1 \geq t_0$.
2. $p(t)$ is monotoon-dalend.
3. $\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$
4. $p'(t)$ bestaat voor $t \geq \delta > 0$ en is monotoon niet-dalend.
 $\lim_{t \rightarrow \infty} p'(t) = 0, \quad |p'(t)| < R(\delta)$ voor $t \geq \delta > 0$.

$$\text{Definieer } k_2(g(t)) = \int_0^{g(t)} e^{-p^{-1}(g(u))} dg(u),$$

$t = p^{-1}(g)$ is de inverse van $g = p(t)$.

$$\int_0^{g(t)} e^{-p^{-1}(g(u))} dg(u) \leq$$

$$\int_0^{p(t)} e^{-p^{-1}(p(u))} dp(u) =$$



$$= \int_{-\infty}^t e^{-u} p'(u) du \quad (\text{zie fig.}).$$

$$Q(x_0, t_0) = k_1(|x_0|) \left\{ \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{g(t)} e^{-p^{-1}(g(u))} dg(u) + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{\infty} dt \int_0^{g(t)} e^{-p^{-1}(g(u))} dg(u) \right\}.$$

$$(6) \quad Q(x_0, t_0) \leq k_1(|x_0|) \{L(t_1 - t_0) + \text{Re}^{-t_1}\}.$$

Hieruit volgt het k-gedrag van (5).

Bovendien volgt uit (6) ook k-stabiliteit: $k_1(|x_0|) = k_2 \left(\frac{L}{M} |x_0| \right)$.

4. De stelling van Zubov.

In [6] wordt de stelling van Zubov met gebruikmaking van het voorgaande bewezen. De uitbreiding hierbij is dat er een Lyapunov-functie geconstrueerd kan worden, die evenzo vele malen continu differentieerbaar is, als het rechterlid van de te beschouwen differentiaalvergelijkingen.

Stelling

Voor de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n); \quad f(x) = (f_1, \dots, f_n) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad \text{bestaat,}$$

veronderstellen wij asymptotische stabiliteit in $x = 0$.

A is een gebied dat de oorsprong bevat; voor elk punt $x_0 \in A$ geldt

$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x_0) = 0$ en elk punt waarvoor dit geldt behoort tot A.

Er bestaan twee functies $U(x)$ en $W(x)$, die voldoen aan

a. $0 < W(x) < 1$ voor $x \neq 0$, $W(x)$ is continu voor $x \in A$.

b. $U(0) = 0$, $U(|x|) > 0$ voor $x \neq 0$.

c. $\frac{dW(F(t, x))}{dt} = -U(|F(t, x)|) \cdot \{1 - W(F(t, x))\}.$

d. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} W(x) = 1$, $\bar{x} \in T$; T vormt de rand van A.

e. $W(x)$ heeft continue eerste afgeleiden.

Bewijs:

Evenals in 3.6. geldt:

$$(7) \quad ||F(t, x)|| \leq \phi(||x||) \sigma(t) \quad \text{voor} \quad ||x|| \leq h, t \geq 0.$$

Er wordt gesteld:

$$U(r) = re^{-\sigma^{-1}(r)}, \quad t = \sigma^{-1}(r) \text{ is de inverse van } r = \sigma(t).$$

$$(8) \quad W(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^\infty U(||F(\tau, x)||) d\tau\right).$$

De integraal in (8) convergeert voor alle x , hetgeen wij bewijzen door $t = t_n$ zò te kiezen dat

$$(9) \quad \phi(||F(t_n, x)||) = \frac{1}{n},$$

de integraal over $0 \leq \tau \leq t_n$ is eenvoudig te schatten.

Voor het interval $t_n \leq \tau \leq \infty$ geven wij de afleiding:

$$\begin{aligned} (10) \quad \int_{t_n}^\infty U(||F(\tau, x)||) d\tau &= \int_0^\infty U(||F(t_n + \tau, x)||) d\tau = \\ &= \int_0^\infty U(||F(\tau, F(t_n, x))||) d\tau. \end{aligned}$$

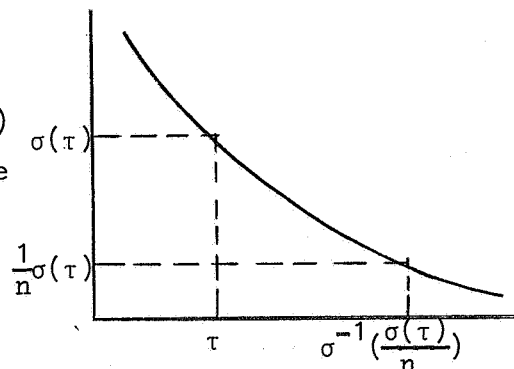
Uit (7) en (9) volgt:

$$||F(\tau, F(t_n, x))|| \leq \phi(||F(t_n, x)||) \sigma(\tau) \leq \frac{1}{n} \sigma(\tau).$$

$$U(||F(\tau, F(t_n, x))||) \leq \frac{1}{n} \sigma(\tau) \exp(-\sigma^{-1}(\frac{\sigma(\tau)}{n})) \leq \frac{1}{n} \sigma(\tau) e^{-\tau}.$$

Deze laatste schatting is uit de figuur af te lezen.

Hierdoor is de integrand van (10) gemajoreerd en volgt convergentie van de integraal in (8), punt a. is hiermee bewezen.



$$1-W(x) = \exp\left(-\int_0^t U(||F(\tau, x)||) d\tau\right) \cdot \exp\left(-\int_t^\infty U(||F(\tau, x)||) d\tau\right),$$

$$\exp\left(-\int_t^\infty U(|F(\tau, x)|)d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^\infty U(|F(\tau, F(t, x))|)d\tau\right) =$$

$$= 1-W(F(t, x))$$

zodat

$$(1-W(x) \cdot \exp\left(\int_0^t U(|F(\tau, x)|)d\tau\right)) = 1-W(F(t, x)).$$

Door beide leden naar t te differentieren bij vaste x verkrijgt men c.

Eigenschap d. wordt op de volgende wijze aangetoond:

Kies een rij $x_n \in A$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

r is een zodanig getal dat voor $\|x^*\| \leq r$ volgt $x^* \in A$.

Voor $t = t_n$ is $\|F(t_n, x_n)\| = r' < r$.

De bewering is dat voor $n \rightarrow \infty$ geldt dat $t_n \rightarrow \infty$; stel dat dit onjuist is dan moet $t_n \leq T$ voor alle n .

$F(t, x)$ is continu in x : bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $\|F(t, x_a) - F(t, x_b)\| < \varepsilon$ als $\|x_a - x_b\| < \delta$ en $0 \leq t \leq T$.

Kies $x_a = x_n$, x_b ligt in een δ -omgeving van x_n en $F(t, x_b) \in A$ voor $0 \leq t < T$ en $\varepsilon < r - r'$.

Indien $n \geq N$ zodanig dat $\|\bar{x} - x_n\| < \frac{1}{2}\delta$, dan bestaat er in de δ -omgeving van x_n een $x_b \notin A$ en $F(t, x_b) \in A$ voor $0 \leq t \leq T$.

Hieruit zou volgen $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, F(t_n, x_b)) = 0$ of $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t+t_n, x_b) = 0$,

doch dit houdt in dat $x_b \in A$. Deze tegenspraak toont aan dat inderdaad $t_n \rightarrow \infty$ voor $n \rightarrow \infty$.

$$\{1-W(F(t_n, x_n))\} = \{1-W(x_n)\} \cdot \exp\left\{\int_0^{t_n} U(|F(\tau, x_n)|)d\tau\right\}.$$

$$(10) \quad a_1 \exp\left\{-\int_0^{t_n} U(|F(\tau, x_n)|)d\tau\right\} \leq 1-W(x_n) \leq$$

$$\leq a_2 \exp\left\{-\int_0^{t_n} U(|F(\tau, x_n)|)d\tau\right\},$$

$$\text{omdat} \quad 0 < a_1 < 1 - W(F(t_n, x_n)) < a_2 < 1.$$

Verder is $U(|F(\tau, x_n)|) \geq a_3 > 0$, zodat uit (10) eigenschap d. volgt voor $n \rightarrow \infty$.

Wij bewijzen nu eigenschap e., hiertoe wordt een nog willekeurige positieve konstante γ genomen, en worden de volgende functies ingevoerd:

$$u_{\gamma}(s) = s \cdot \exp\left\{-\gamma \sigma^{-1}\left(\frac{s}{\phi(|h|)}\right)\right\},$$

$$U_{\gamma}(r) = \int_0^r u_{\gamma}(s) ds,$$

$$(12a) \quad W_{\gamma}(x) = 1 - \exp\left\{-\int_0^{\infty} U_{\gamma}(|F(\tau, x)|) d\tau\right\}.$$

(12a) komt in de plaats van (8) en heeft dezelfde eigenschappen a t/m d.

$$(12b) \quad \frac{\partial W_{\gamma}}{\partial x_i}(x) = \{1 - W_{\gamma}(x)\} \int_0^{\infty} \frac{\partial U_{\gamma}(|F(\tau, x)|)}{\partial x_i} d\tau.$$

Voor het bestaan van de partiele afgeleiden van W_{γ} is het nodig dat de integraal in (12b) convergeert voor alle x .

Stel $g_{ij} = \frac{\partial F_i(t, x_0)}{\partial x_{0j}}$ dan is

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} g_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Uit dit stelsel differentiaalvergelijkingen kan men concluderen

$$|g_{ij}(t)| \leq k_1 e^{k_2 t}, \text{ met } k_1 \text{ en } k_2 \text{ zekere constanten.}$$

$$\frac{\partial U_{\gamma}(|F(\tau, x)|)}{\partial x_i} = \frac{dU_{\gamma}(r)}{dr} \Big|_{r=|F(\tau, x)|} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{F_k(\tau, x)}{|F_k(\tau, x)|} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}.$$

$$(13) \quad \frac{\partial U_{\gamma}(|F(\tau, x)|)}{\partial x_i} \leq u_{\gamma}(|F(\tau, x)|) \cdot k_1 e^{k_2 t}$$

$$u_{\gamma}(|F(\tau, x)|) \leq |F(\tau, x)| \exp\left\{-\gamma \sigma^{-1}\left(\frac{\phi(|x|)}{\phi(h)} \sigma(\tau)\right)\right\},$$

hetgeen volgt uit (17).

$$u_{\gamma}(|F(\tau, x)|) \leq |F(\tau, x)| e^{-\gamma \tau}.$$

Voor (13) vinden wij de afchatting

$$\frac{\partial U_{\gamma} (||F(\tau, x)||)}{\partial x_i} \leq ||F(\tau, x)|| k_1 e^{(k_2 - \gamma)\tau}.$$

Als wij $\gamma > k_2$ kiezen is de integraal in (12) convergent voor iedere x .

Indien $f(x)$ hogere orde partiele afgeleiden bezit kan de procedure herhaald worden door U_{γ} te integreren, wij verkrijgen dan voor W_{γ} een functie die hogere partiële afgeleiden bezit.

Literatuur.

- [1] A. Straus, Lyapunov-functions and L^p -solutions of differential equations.
Trans. ac. of the Am. Math. Soc. vol. 119(1965) blz. 37-50.
- [2] J.L. Massera, On Lyapunov's condition of stability.
Ann. als Math. vol. 50(1949) blz. 705-721.
- [3] W. Hahn, On a New Type of Stability.
J. of Diff. Eq. vol. 3(1967) blz. 440-448.
- [4] J.J. Levin & J.A. Nohel, Global Asymptotic Stability for Nonlinear Systems of Differential Equations and Applications to reactor dynamics.
Arch. of Rat. Mech. and Anal. vol. 5(1960) blz. 194-211.
- [5] N.N. Krasovski, Stability of Motion.
Stanford Univ. Press, 1963.
- [6] W. Hahn, Stability of Motion.
Springer Verlag, 1967.

J.F. Frankena

V. De tweede methode van Lyapunov toegepast op het stabiliteitsprobleem bij stelsels partiële differentiaal vergelijkingen.

1. Inleiding

Onder invloed van de technologische ontwikkeling is in de tweede helft van de negentiende eeuw een systematisch en wiskundig gefundeerd onderzoek begonnen naar de stabiliteit van bewegende, i.h.b. trillende systemen. De theorie van A.M. Lyapunov [1] is tot nu toe één der krachtigste hulpmiddelen gebleken. Zij is in wezen een uitbreiding van de stelling van Lagrange-Dirichlet, welke zegt dat een evenwichtspositie, waarin de potentiële energie minimaal is, stabiel is. In eerste instantie poogde men met de theorie van Lyapunov de stabiliteit van oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen te onderzoeken.

Men is zich echter ook gaan interesseren voor de vraag of Lyapunov's theorie toepasbaar is op partiële differentiaalvergelijkingen.

Aanvankelijk wordt hierbij uitdrukkelijk de continuïteit en eenduidigheid der oplossingen vooropgesteld. Er zijn echter vele problemen, waarbij aan deze voorwaarde niet voldaan is, b.v. gemengde rand- en beginwaarde problemen waarbij de oplossing niet eenduidig is, of waarbij zich discontinuïteiten voordoen. Het is de grote verdienste van o.a. V.I. Zubov [2] geweest dat deze gevallen zijn behandeld, en wel in de theorie der z.g. algemene systemen. Deze zijn een generalisatie van dynamische systemen in die zin dat de uitdrukkelijke eis van continuïteit vervalt. In de theorie der algemene systemen wordt alleen Lyapunov's tweede of directe methode gebruikt. Deze onderscheidt zich van de eerste methode hierin, dat de nodige informatie direct uit de gegeven differentiaalvergelijking(en) wordt betrokken, zonder kennis van de oplossingen zelf.

2. De tweede methode van Lyapunov.

Zij $X = (x_1, \dots, x_n)$ een element van een n -dimensionale Euclidische vectorruimte E_n , $\rho(X, 0) = \|x\|$ de Euclidische norm van X , terwijl de componenten x_i afhankelijk zijn van de reële parameter t .

Def. 2.1: Een positief definitie functie^{*)} $V(X)$ voldoet aan:

a. $V(X)$ is éénwaardig, continu en gedefinieerd in een gebied

$$\|X\| < R \text{ in } E_n, R > 0;$$

b. $V(0) = 0$;

c. $V(X) > 0$ voor $X \neq 0$.

Def. 2.2: Een Lyapunov functie is een continu differentieerbare positief definitie functie $V(X)$ met:

$$d. V = \frac{dV}{dt} \leq 0$$

Def. 2.3: Zij $M \in E_n$ en $r > 0$. De r -omgeving $S(M, r)$ van M is de verzameling

$$S(M, r) = \{X: \rho(X, M) < r\}$$

terwijl

$$\overline{S(M, r)} = \{X: \rho(X, M) \leq r\}$$

Beschouw nu een vectorfunctie $F(X)$, gedefinieerd op E_n of een deel ervan, met $F(0) = 0$. We veronderstellen dat F zodanig gekozen is dat de existentie van oplossingen in een omgeving van $X = 0$ en $-\infty < t < \infty$ van het stelsel gewone differentiaal vergelijkingen.

$$(2.1) \quad \dot{X} = F(X)$$

gewaarborgd is. Het stelsel (2.1) bezit de nuloplossing $X = 0$.

Def. 2.5: De nuloplossing van (2.1) heet stabiel (in de zin van Lyapunov) indien $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \mid X^{(0)} \in S(0, \delta) \Rightarrow X(X^{(0)}, t) \in S(0, \epsilon)$ voor $t \geq 0$.

Def. 2.6: De nuloplossing van (2.1) heet asymptotisch stabiel indien ze stabiel is en bovendien $\|X(X^{(0)}, t)\| \Rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

Def. 2.7: De nuloplossing van (2.1) heet instabiel indien

$$\exists \epsilon > 0 \mid \forall \delta > 0 \exists T(\delta) \geq 0 \mid X^{(0)} \in S(0, \delta) \Rightarrow X(X^{(0)}, t) \notin S(0, \epsilon) \text{ voor } t \geq T.$$

*)

Geheel analoog definieert men een negatief definitie functie

Opmerking. Het stelsel (2.1) wordt autonoom genoemd vanwege het ontbreken van t in het rechterlid $F(X)$, i.t.t. niet-autonome systemen zoals

$$(2.2) \quad \dot{X} = F(X, t)$$

De kern van Lyapunov's theorie wordt gevormd door een viertal stellingen, welke we hier voor het autonome stelsel (2.1) formuleren.

Stelling 2.1. De nuloplossing van (2.1) is dan en slechts dan stabiel indien in een voldoende kleine omgeving van $X = 0$ een Lyapunov functie gedefinieerd is.

Stelling 2.2 De nuloplossing van (2.1) is dan en slechts dan asymptotisch stabiel indien in een voldoende kleine omgeving van $X = 0$ een Lyapunov functie gedefinieerd is met negatief definitieve tijdsafgeleide $\dot{V}$.

Stelling 2.3 De nuloplossing van (2.1) is dan en slechts dan instabiel indien een functie $V(X)$, met $V(0) = 0$, met continue partiële afgeleiden gevonden kan worden zodanig dat $\dot{V}$ positief definitief is en V willekeurig dicht bij de oorsprong nog positieve waarden kan aannemen.

Stelling 2.4 De nuloplossing van (2.1) is dan en slechts dan instabiel indien een functie $V(X)$, $V(0) = 0$ met continue partiële afgeleiden gevonden kan worden, zodanig dat

$$\dot{V} = \lambda V + W,$$

waarin λ een positieve constante is en $W(X)$ niet-negatief, terwijl $V(X)$ in een willekeurig kleine omgeving van de oorsprong nog positieve waarden kan aannemen.

Voor niet-autonome systemen zoals (2.2) moet e.e.a. uniform in t geschieden. Stabiliteit wordt in dit geval ook wel uniforme stabiliteit genoemd. Instabiliteit is dan een eigenschap, welke de uniformiteit (in t) der stabiliteit tegenspreekt. De ruimte E_n wordt vaak de faseruimte genoemd, terwijl $E_n \times E_1$ de bewegingsruimte heet ($E_1 = \{t \mid -\infty < t < \infty\}$).

3. Dynamische systemen

Een voor de hand liggende vraag is, of de tweede methode van Lyapunov kan worden uitgebreid tot stelsels partiële differentiaal vergelijkingen. Het is wenselijk, het gegeneraliseerde formalisme geschikt te doen zijn voor toepassing op gewone differentiaalvergelijkingen.

Hiertoe staat ons ten dienste het begrip dynamisch systeem, hetwelk in zijn meest algemene vorm een mathematisch model is voor een één-duidig oplosbaar rand-beginwaarde probleem (gemengd probleem).

Def. 3.1. Zij R een metrische ruimte met metriek ρ . Onder een dynamisch systeem in R verstaan we een één-parametrige familie van transformaties F_t , $-\infty < t < \infty$, van R in zichzelf, met de eigenschappen:

- a. $p \in R$ en $t \in (-\infty, \infty)$ impliceert $F_t(p) \in R$; $F_0(p) = p$;
- b. $F_t(p)$ is continu in t en p , i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(p, t_1, \varepsilon) \& \delta_2(p, t_1, \varepsilon) / \rho(p, q) < \delta_1 \& |t_1 - t_2| < \delta_2 \Rightarrow \rho(F_{t_1}(p), F_{t_2}(q)) < \varepsilon;$$

- c. $F_{t_1}(F_{t_2}(p)) = F_{t_1+t_2}(p)$.

Vaak wordt $F_t(p)$ genoteerd als $f(p, t)$.

Deze familie begrensde transformaties vormt een groep met nulelement $f(p, 0) = p$ en inverse $f(p, -t)$: $f(f(p, -t), t) = f(p, 0) = p$. De afbeelding F_t heet wel een beweging; de verzameling $f(p, t)$ voor vaste p en $-\infty < t < \infty$ de baan of trajectorie door p .

Def. 3.2. Een invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p, t)$ in R is een deelverzameling van R waarvoor geldt

$$p \in M \Rightarrow f(p, t) \in M, \quad -\infty < t < \infty.$$

Opmerking M bestaat dus uit gehele trajectoriën van het dynamische systeem.

We zullen ons bezighouden met het stabiliteitsprobleem van deze invariante verzamelingen. Aangezien men kan bewijzen dat de rand van M eveneens invariant is, heeft het zin om de stellingen te formuleren voor gesloten invariante verzamelingen. De elementen $p \in R$ zijn in het algemeen op een Euclidische ruimte gedefinieerde functies i.p.v. punten uit E_n ; derhalve ligt het voor de hand om het begrip Lyapunov funktie te generaliseren tot Lyapunov funktionaal. De eigenschappen van $V(p)$ blijven onveranderd zoals in §2. Bij wijze van voorbeeld geven we hier de tweede van Lyapunov's vier stellingen in de formulering voor dynamische systemen.

Stelling 3.1. Een gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ in een metrisch ruimte R met metriek ρ is dan en slechts dan asymptotisch stabiel indien er een voldoende kleine omgeving $S(M,r)$ bestaat waarin een funktionaal V gedefinieerd is met de eigenschappen

- a. Voor willekeurige, voldoende kleine waarde van $\delta_1 > 0$ is een $\varepsilon_1 > 0$ te vinden zó dat $V(p) > \varepsilon_1$ indien $p \in S(M,r)$ en $\rho(p,M) > \delta_1$;
- b. Bij willekeurig kleine $\varepsilon_2 > 0$ kan een $\delta_2 > 0$ aangewezen worden zó dat $V(p) \leq \varepsilon_2$ indien $\rho(p,M) < \delta_2$;
- c. $V(f(p,t))$ is een niet-stijgende functie van t voor $t \geq 0$, $p \in S(M,r)$, zolang $f(p,t) \in S(M,r)$.
- d. $V(f(p,t)) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$ voor elke beweging $f(p,t) \in S(M,r)$.

Opm. De voorwaarden a t/m c zijn de nodige en voldoende voorwaarden voor stabiliteit van M .

Nog enige belangrijke begrippen.

Def. 3.3. Een asymptotisch stabiele invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ in R heet uniform asymptotisch stabiel indien

$$\exists \delta > 0 \mid \forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon) > 0 \mid \rho(p,M) < \delta \Rightarrow \rho(f(p,t),M) < \varepsilon \text{ voor alle } t \geq T(\varepsilon).$$

Def. 3.4. Een asymptotisch stabiele gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ in R heet uniform aantrekkend indien

$$\exists \delta > 0 \mid \forall \varepsilon \in (0, \delta) \exists T > 0 \& \alpha > 0 \mid \varepsilon < \rho(p,M) < \delta \Rightarrow \rho(f(p,t),M) > \alpha \text{ voor alle } t \in [0, T].$$

Def. 3.5. Zij M asymptotisch stabiel onder $f(p,t)$. Het gebied van asymptotische stabiliteit A van M is de verzameling

$$A = \{ p \mid p \in R, p \notin M \& \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(f(p,t),M) = 0 \}$$

Men kan bewijzen dat A een open verzameling is, welke een (voldoend kleine) omgeving van M bevat.

Enkele zeer belangrijke stellingen uit de theorie der dynamische systemen willen we hier nog signaleren.

Stelling 3.2. Als een gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ in R uniform asymptotisch stabiel is, bestaat er voor alle $t \in (-\infty, \infty)$ een continue functie $L(t)$, welke voor van $-\infty$ tot $+\infty$ toenemende t sterk monotoon afneemt van $+\infty$ tot 0 , met de eigenschap

$$\rho(f(p,t),M) \leq L(t) \text{ als } t \geq 0 \text{ en } \rho(p,M) < \delta,$$

waarbij δ de grootheid uit de stabiliteitsdefinitie is.

Stelling 3.3. Een asymptotisch stabiele gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ in R is, indien M een voldoende kleine compacte omgeving bezit, uniform asymptotisch stabiel en uniform aantrekkend.

4. Voorbeelden.

1. Beschouw de lineaire partiële differentiaalvergelijking

$$(4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = au + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

waarin $a, b_1, \dots, b_n$ reële constanten zijn. Zij Φ de Banachruimte der in E_n gedefinieerde continu differentieerbare vectorfuncties $\phi(X)$, $X \in E_n$, met

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \phi(X) = L_\phi, \quad L_\phi \text{ constant en } |L_\phi| < \infty$$

en norm

$$||\phi|| = \sup_{X \in E_n} |\phi|$$

Voor ieder element $\phi \in \Phi$ kunnen we een oplossing $u(\phi, t)$ van (4.1) met $u(\phi, 0) = \phi$ vinden, nl.

$$(4.2) \quad u(\phi, t) = \phi(x_1 + b_1 t, \dots, x_n + b_n t) \exp(at).$$

Voor vaste t kunnen we $u(\phi, t)$ beschouwen als een transformatie van Φ in zichzelf. Deze transformatie heeft de eigenschappen van een dynamisch systeem:

- De functies $u(\phi, t)$ zijn voor vaste $\phi \in \Phi$ eënduidig bepaald, continu differentieerbaar naar alle argumenten $(x_1, \dots, x_n; t)$ en $u(\phi, 0) = \phi$;
- De functies $u(\phi, t)$ zijn continu in beide variabelen, i.e.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1(\phi_1, t_1, \epsilon) \& \delta_2(\phi_1, t_1, \epsilon) : |t_1 - t_2| < \delta_1 \& ||\phi_1 - \phi_2|| < \delta_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||u(\phi_1, t_1) - u(\phi_2, t_2)|| < \epsilon ;$$

$$c. \quad u(u(\phi, t_1), t_2) = u(\phi, t_1 + t_2).$$

2. Onder een autonoom stelsel partiële differentiaalvergelijkingen van de 1e orde verstaan we het type

$$(4.3) \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) ; i, s = 1, \dots, n; j=1, \dots, k.$$

We veronderstellen dat alle variabelen van f_s in een zekere Euclidische ruimte variëren, en f_s continu is in zijn definitiegebied. Zij voorts Φ een metrische of genormeerde lineaire ruimte met als elementen de vector-funkties $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ met in E_k gedefinieerde componenten. Stel dat voor willekeurige $\phi \in \Phi$ een oplossing $U = U(\phi, t)$ van (4.3) te vinden is. ($U = (u_1, \dots, u_n)$) met de eigenschappen

- a. $U(\phi, t)$ is gedefinieerd voor alle $t \in (-\infty, \infty)$, $U(\phi, t) \in \Phi$, $U(\phi, 0) = 0$;
- b. $U(\phi, t)$ is continu in ϕ en t ;
- c. $U(U(\phi, t_1), t_2) = U(\phi, t_1 + t_2)$.

Dan bepaalt (4.3) een dynamisch systeem $U(\phi, t)$ in Φ . Zij nu A een open omgeving van de "gesloten invariante verzameling" $U=0$. Er geldt:

Stelling 4.1. Een nodige en voldoende voorwaarde, opdat A het gebied van asymptotische stabiliteit van de nuloplossing zij is het bestaan van twee funktionalen $V(\phi)$ en $W(\phi)$ met de eigenschappen:

- a. V is gedefinieerd en continu in A , W in Φ ;
- b. Als $\phi \in A$ dan $-1 < V(\phi) < 0$, als $\phi \in \Phi$ dan $W(\phi) > 0$ als $\phi \neq 0$;
- c. Voor willekeurige $\gamma_2 > 0$ bestaan positieve getallen γ_1 en α_1 , zodat

$$\rho(\phi, 0) \geq \gamma_2 \Rightarrow V(\phi) - \gamma_1 \text{ en } W(\phi) > \alpha_1 ;$$
- d. Bij limietovergang $\rho(\phi, 0) \rightarrow 0$ geldt $\lim W(\phi) = \lim V(\phi) = 0$;
- e. Als $\bar{\phi}$ randpunt is van A en $\phi \in A$, $\phi \neq 0$, dan is $\lim_{\rho(\phi, \bar{\phi}) \rightarrow 0} V(\phi) = -1$;
- f. De tijdafgeleide van $V(\phi)$ langs de baan $U(\phi, t)$ voldoet aan

$$\frac{dV(U(\phi, t))}{dt} = W(U(\phi, t)) \cdot (1 + V(U(\phi, t))).$$

5. Algemene systemen.

De voorgaande theorie kan nog verder generaliseerd worden door de continuïteitseis en de voorwaarde van eënduidige oplosbaarheid te laten vallen. We komen dan tot de volgende definitie.

Def. 5.1. Een algemeen systeem is familie twee-parametrige transformaties $F_{t_0}^t$ van een metrische ruimte in zichzelf, met de eigenschappen:

- a. Voor willekeurige $p \in R$ en $t \geq 0$ is $F_{t_0}^t(p)$ gedefinieerd, $F_{t_0}^t(p) \subset R$, $t \geq t_0$;
 b. $F_{t_0}^t(p) \rightarrow p$ als $t \rightarrow t_0 + 0$, d.w.z.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \mid t - t_0 < \delta \rightarrow F_{t_0}^t(p) \subset S(p, \epsilon);$$

- c. Voor willekeurige $p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p)$, $t_1 \geq t_0$, is de verzameling $F_{t_1}^t(p_1)$ gedefinieerd, en

$$UF_{t_1}^t(p_1) = F_{t_0}^t(p) \text{ voor alle } t \geq t_1,$$

waarbij de vereniging genomen wordt over alle $p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p)$.

Opmerking In een algemeen systeem is $\rho(F_{t_0}^t(p), F_{t_0}^{t_1}(p))$ niet gedefinieerd.

Als maat voor de afstand van het systeem tot een invariante verzameling M neemt men

$$\rho(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F_{t_0}^t(p_0)} (p, M),$$

terwijl uitspraken over funktionalen i.h.a. op analoge wijze worden vervangen door uitspraken over het supremum der waarden van de funktionalen. Aangezien de beweging $F_{t_0}^t$ slechts gedefinieerd wordt verondersteld voor $t \geq t_0$ en bovendien geen eenduidigheid geëist wordt, vormen transformaties van bovenstaand type geen groep.

Hoe de voorgaande theorie gemodificeerd wordt laten we zien aan de hand van het niet autonome stelsel

$$(5.1) \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(t, x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}), \quad i, s = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k;$$

waarin de rechterleden gedefinieerd en continu zijn voor $t \geq 0$ en op een zeker gebied van de Euclidische ruimte der argumenten $x_1, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_k}$.

Zij Φ de ruimte der op E_k gedefinieerde vectorfuncties $\phi = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_n(x_1, \dots, x_k))$ met een passende metriek of norm. Stel dat het voor willekeurige $\phi \in \Phi$ en $t_0 \geq 0$ mogelijk is, een oplossing $U = U(\phi, t, t_0)$ van (5.1) te construeren met de eigenschappen:

1. $U(\phi, t, t_0)$ is gedefinieerd voor alle $t \geq t_0$, $U(\phi, t, t_0) \in \Phi$ voor alle $t \geq t_0 \geq 0$;

2. $U(\phi, t, t_0) = \phi$ als $t = t_0$.

Als ook geldt

3. $U(\phi, t, t_0) = 0$ als $\phi = 0$, $t \geq t_0$,

heeft (5.1) de nuloplossing. Deze familie oplossingen vormt een algemeen systeem.

Stelling 5.1. Nodige en voldoende voorwaarde voor de stabiliteit van de nuloplossing van (5.1) in de existentie van een éénparametrische familie funktionalen V_t met de eigenschappen:

1. Voor iedere $\phi \in S(0, r)$ ($r > 0$) is een funktie $V_t(\phi)$ van $t, t \geq 0$ gedefinieerd;

2. Bij voldoende kleine $c_1 > 0$ is een $c_2 > 0$ te vinden zodat $V_t(\phi) > c_2$ voor $\rho(\phi, 0) > c_1$ en alle $t \geq 0$;

3. $V_t(\phi) \rightarrow 0$ als $\rho(\phi, 0) \rightarrow 0$, uniform m.b.t. $t, t \geq 0$;

4. $V_t(U(\phi, t, t_0))$ is niet-toenemend voor alle $t \geq t_0$ waarvoor V_t gedefinieerd is. Als bovendien geldt

5. $V_t(U(\phi, t, t_0)) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$ voor alle $t_0 \geq 0$ en $\rho(\phi, 0) < \delta_1$, $\delta_1 > 0$

voldoende klein, dan is $U=0$ asymptotisch stabiel, terwijl tevens het omgekeerde geldt.

Analoog worden ook de andere "Lyapunov-stellingen" geformuleerd. De bewijzen zijn uiteraard iets gecompliceerder dan in de versie voor dynamische systemen, aangezien b.v. niet de continuïteit van $\rho(t, p_0, t_0)$ voorhanden is. Voorts heeft Zubov nog een aantal stellingen van kwalitatief karakter afgeleid [2]. Men kan zeggen dat deze kant van de theorie, nl. de kwalitatieve, vrij ver ontwikkeld is, zulks in tegenstelling tot het meer praktische aspect van het gehele probleem: de daadwerkelijke constructie van Lyapunov funktionalen en - funkties.

In de eerste plaats wordt men gekonfronteerd met de vraag, of een existentiestelling, een uniciteitsstelling en een continuïteitsstelling voor de oplossingen van een stelsel differentiaalvergelijkingen voorhanden zijn.

Ten tweede moet men dan een passende maat voor de afstand van een oplossing tot een invariante verzameling zien te vinden. Dit is maar al te vaak een kwestie van "good guessing", en vereist inzicht in de fysica van het probleem. Een aantal typen lineaire en quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen is behandeld in Zubov's boek.

6. Toepassingen.

1. Beschouw de parabolische vergelijking

$$(6.1) \quad u_{xx} = u_t$$

met randvoorwaarden

$$(6.2) \quad \begin{cases} u_x = 0 & \text{voor } x=0 \\ u_x = 0 & \text{voor } x=1 \end{cases}$$

en willekeurige kwadratisch integreerbare beginvoorwaarden $\phi(x)$ voor $t=0$. Het is bekend dat dit probleem een oplossing in $L_2(0,1)$ bezit. De vergelijking (6.1) heeft de triviale oplossing $u=0$. Deze is stabiel, hetgeen kan worden aangetoond door te beschouwen de (voor de hand liggende) funktionaal

$$(6.3) \quad V(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dx,$$

Er geldt namelijk

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \int_0^1 u u_t dx = \int_0^1 u u_{xx} dx = \\ &= u u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x^2 dx = - \int_0^1 u_x^2 dx. \end{aligned}$$

Aangezien $u_x \neq 0$ voor $t < \infty$, geldt $\frac{dV}{dt} < 0$, terwijl bovendien $\lim_{\|\phi\| \rightarrow 0} V(u(\phi, t)) = 0$

(het probleem (6.1), (6.2) met $\phi \neq 0$ heeft alleen de nuloplossing). Bijgevolg is $u=0$ zelfs asymptotisch stabiel.

Nemen we i.p.v. (6.3)

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx$$

dan volgt

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 u_x u_{xt} dx = u_x u_t \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xx} u_t dx = - \int_0^1 u_t^2 dx$$

Aangezien $u=0$ de enige stationaire oplossing is van (6.1), (6.2), is als $\phi(x) \neq 0$, wederom

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

2. Een eerste-orde reactie met warmte- en massa overdracht binnen een katalysator geeft aanleiding tot een randwaardeprobleem van het type

$$(6.4) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - f(y),$$

$$(6.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & \text{voor } x=0 \\ y = 1 & \text{voor } x=1 \end{cases}$$

Hierin is y b.v. de concentratie in een geschikte normering, voor de warmte-overdracht geldt een analoge vergelijking. De term $f(y)$ is niet-lineair.

Wei [3] vond d.m.v. numerieke analyse verschillende gevallen met stabiele en instabiele stationaire oplossingen, afhankelijk van de waarde van enige in $f(y)$ voorkomende parameters. Een analyse met de Lyapunov-theorie kon dit gedrag bevestigen. Wei gebruikte als funktionaal de L_2 -metriek:

$$(6.6) \quad V(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y-y^*)^2 dx,$$

waar y^* een stationaire oplossing voorstelt. M.b.v. $y=y^*+u$ en met gebruikmaking van (6.4) volgt

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \int_0^1 (y-y^*) \frac{\partial y}{\partial t} dx = \\ (6.7) \quad &= \int_0^1 u \left[\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(y^*+u) - f(y^*) + f(y^*) \right] dx = \\ &= \int_0^1 u \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(y^*+u) + f(y^*) \right] dx \end{aligned}$$

Door middel van partiële integratie en met gebruikmaking van de randvoorwaarden (6.5) volgt

$$(6.8) \quad \frac{dV}{dt} = - \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 u \{f(y^*+u) - f(y^*)\} dx \right]$$

Het verloop van f als reactie op de "storing" u verschaft informatie over de stabiliteit resp. instabiliteit van de stationaire oplossing y^* .

3. We beschouwen de vergelijking ([5])

$$(6.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0, \quad u(x, 0) = \phi(x),$$

een speciaal geval van (4.1), met reële constanten b en c . Stel $\phi(x)$ is kwadratisch integreerbaar, dan is de oplossing u dit ook. Bijgevolg gaat de oplossing naar nul als $|x| \rightarrow \infty$.

Beschouw nu de funktionaal

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$$

Hiervoor geldt

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} u u_t dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u [c u_x + bu] dx = \\ &= -c \int_{-\infty}^{\infty} u u_x dx - b \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = \\ &= -cu^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} + c \int_{-\infty}^{\infty} u u_x dx - b \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = -b \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx. \end{aligned}$$

Als $b > 0$ is $u=0$ asymptotisch stabiel.

4. Aan de gasdynamica ontleen we de vergelijking (zie [5])

$$(6.10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

met de (kwadratisch integreerbare) beginvoorwaarde

$$u = \phi(x) \quad \text{voor } t=0.$$

De oplossing u behoort ook tot L_2 en wederom kiezen we als Lyapunov-funktionaal

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx.$$

In dit geval vindt men weer asymptotische stabiliteit:

$$\frac{dV}{dt} = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Opmerking.

Moser, Brayton en Miranker hebben een geheel andere, meer constructieve methode ontwikkeld om Lyapunov-funktionalen aan te geven. Voor meer informatie over hun interessante analyse zij de lezer verwezen naar de literatuur ([6] en [7]), aangezien hun beschouwingen niet binnen het kader van deze voordracht aan de orde kunnen komen.

1. A.M. Lyapunov: Problème général de la stabilité du mouvement.
Ann.Fac.Sci. Toulouse, vol. 9. (1907),
Ann.Math.Study, no. 17. (1949), Princeton Univ. Press.
2. V.I. Zubov : Methods of A.M. Lyapunov and their application.
Noordhoff, 1964.
3. J. La Salle : Stability by Lyapunov's direct method.
S. Lefschetz : Academic Press, 1961.
4. J. Wei : The stability of a reaction with intra-particle diffusion of mass and heat: The Lyapunov methods in a metric function space.
Chem.Eng.Sci., vol. XX, no 8, aug. 1965, p.729.
5. L.J.F. Broer : Introduction to general dynamic systems, stability and waves.
Zomercursus, Eindhoven.
6. R.K. Brayton : A stability theory for nonlinear mixed initial boundary value problems, Archive for rational mech. and Math., 17, pp. 358-376 (1964).
7. R.K. Brayton : A theory of nonlinear networks, I, Quart. of Appl. Math., 22, pp. 1-33(1964).

Colloquium Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

H. Bavinck

VI. Stabiliteit en Continuïteit met betrekking tot twee metrieken.

1. Inleiding

De laatste jaren is er veel gewerkt aan generalisaties van de theorie van A.M. Lyapunov, om deze toepasbaar te maken op partiële differentiaalvergelijkingen. In de vorige voordracht heeft Frankena het werk van V.I. Zubov [1] bij U ingeleid en aan de hand van vele voorbeelden laten zien, dat Zubov's generalisatie van Lyapunov's directe methode aanzienlijke toepassingsmogelijkheden biedt. Hier wordt een andere aanpak van dergelijke problemen behandeld, nl. het werk van A.A. Movchan [2, 3] en de verdere uitbouw van diens theorie door de Schotten Knops, Gilbert en Wilkes [4, 5]. Movchan, die tot zijn theorie komt, door de directe methode van Lyapunov toe te passen op problemen uit de elasticiteitstheorie, heeft als essentieel nieuw element de introductie van 2 verschillende metrieken, één die dient om de afwijkingen van het systeem t.o.v. een zogenaamde ongestoorde oplossing in de begintoestand te meten, en één, die een maat is voor de later volgende verstoringen. Aan de hand van het eenvoudige voorbeeld van de trillende snaar zullen we trachten de ideeën van Movchan te demonstreren.

De verplaatsing $u(x, t)$ voldoet aan de golfvergelijking

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (1.1)$$

met randvoorwaarden

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (1.2)$$

We beschouwen de stabiliteit van de evenwichtssituatie $u(x, t) = 0$ bij willekeurig kleine beginverstoringen in u , u_x of u_t voor alle $t > 0$. We introduceren de totale energie van het systeem

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2 + u_t^2) dx$$

en de grootheid $\rho_0(u)$ gedefinieerd door

$$\rho_0(u) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_x(x, 0)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_t(x, 0)|$$

Nu voldoet E aan de volgende voorwaarden:

- 1) $E \geq 0$
- 2) $E \rightarrow 0$ als $\rho_0(u) \rightarrow 0$ voor $t = 0$
- 3) E is constant als functie van de tijd
- 4) $\sup_{0 < t < \infty} (\sup_{0 < x < 1} u^2) \leq 2E$

Deze laatste eigenschap wordt als volgt bewezen:

$$u(x, t) = \int_0^x u_x dx \quad \text{omdat } u = 0 \text{ in } x = 0.$$

De ongelijkheid van Schwarz levert:

$$u^2 \leq \int_0^x (u_x)^2 dx \cdot \int_0^x dx.$$

$$\text{Als } x \leq 1 \text{ geldt } \sup |u|^2 \leq \int_0^1 u_x^2 dx \quad (1.3)$$

en dus

$$\sup |u|^2 \leq 2E.$$

Uit deze 4 voorwaarden blijkt dat de grootte van de verplaatsing wordt beheerst door de grootte van de beginverstoring, aangegeven door $\rho_0(u)$. Dat wil zeggen, dat willekeurig kleine beginverstoringen resulteren in willekeurig kleine verplaatsingen op elk tijdstip, wat stabiliteit inhoudt. Stabiliteit is in dit voorbeeld dus verkregen door aan te tonen, dat de maximale verplaatsing begrensd is door een zekere positieve functionaal, die 0 is voor de beginvoorwaarden van u_x en u_t en constant is in tijd. Dit behelst het essentiële van Movchan's stellingen nl. dat stabiliteit kan worden vastgesteld, wanneer er een niet stijgende functionaal gevonden kan worden, die voldoet aan zekere eisen met betrekking tot twee metrieken (hier $\rho_0(u)$ en $\sup |u(x, t)|$).

De eerste metriek meet in de begintoestand de grootheden, die de beweging van het systeem bepalen, de tweede is een maat voor de grootte, ten opzichte waarvan stabiliteit is geëist. In de aanpak van Movchan houdt men de vrijheid in de keuze van de metrieken. Inplaats van $\sup |u|$ had men bijvoorbeeld ook $\int_0^1 u^2 dx$ kunnen nemen.

In dit simpele voorbeeld is de invoering van twee metrieken niet noodzakelijk, maar er zijn voorbeelden aan te geven, die in het algemeen niet stabiel zijn t.o.v. metrieken van het type $\sup |u|$. In het artikel van Knops en Wilkes [4] worden hiervan voorbeelden gegeven en tevens

behandelt deze publicatie een aantal ongelijkheden, die kunnen helpen bij het bepalen van stabiliteit. Een van hun voorbeelden zal hier worden behandeld. De meest recente bijdrage tot deze theorie is het artikel van Gilbert en Knops [5], dat hier in grote lijnen zal worden besproken. Door gebruik te maken van het verband tussen stabiliteit en continuïteit slagen zij erin aan de ene kant verschillende stellingen veel eenvoudiger te bewijzen en aan de andere kant algemenere situaties te scheppen, waarin de stellingen over stabiliteit kunnen worden toegepast.

2. Dynamische systemen.

Een dynamisch systeem heeft betrekking op een tijdsvariabele t , die loopt over een eindig of oneindig tijdsinterval T en een variabele x , die zelf een functie kan zijn van de variabelen $x_1, x_2, \dots$. Deze variabelen $x_1, x_2, \dots$ corresponderen met meetbare waarden van fysische grootheden op een tijdstip t van een gegeven tijdsinterval T en kunnen bijvoorbeeld de verplaatsing, snelheid, spanning, temperatuur of concentratie zijn. Dus x kan beschouwd worden als een functie op T die waarden aanneemt in een verzameling X . De beweging van een dynamisch systeem correspondeert met het trekken van een baan in X , d.w.z. de waarden $x(\tau)$ als τ over T doorloopt. Een baan met waarde $x(\tau)$ op zeker tijdstip $\tau \in T$ zal als verdere beweging hebben de functie $x(\tau + t)$, waarbij $t \in T$ en $t \geq 0$, zolang $\tau + t$ gedefinieerd is.

Zij X een willekeurige verzameling, T het interval $0 \leq t \leq \infty$ en $B(X, T)$ een verzameling van functies gedefinieerd op T en waarden aannemend in X . Neem aan, dat er een functionaal ρ op $X \times X$ bestaat en die positief definitief is,

- d.w.z.
- 1) $\rho(x, y) \geq 0, \quad x, y \in X$
 - 2) $\rho(x, y) = 0, \iff x = y$

Deze positief definitieve functionaal kan $B(X, T)$ voorzien van een topologie. Immers, als we stellen

$$\rho(\psi, \phi) = \sup_{t \in T} \rho(\psi(t), \phi(t)), \quad \psi, \phi \in B(X, T)$$

kunnen we als open verzamelingen om ϕ beschouwen $\{U_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ waarbij

$$U_\epsilon = \{\psi \in B(X, T) : \rho(\psi, \phi) < \epsilon\}.$$

Bezit X een norm, dan zullen we altijd nemen $\rho(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\|$.

Als T_0 een deelverzameling is van T (T_0 is de verzameling van de mogelijke begintijdstippen), dan definiëren we, voor $\tau \in T_0$ en voor $\phi \in B(X, T)$, de verschoven functie ϕ_τ van ϕ door

$$\phi_\tau(t) = \phi(\tau + t) \quad t \in T.$$

Deze functie neemt waarden aan in X ; daar aan $B(X, T)$ nog geen eisen zijn opgelegd hoeft ϕ_τ a priori niet in $B(X, T)$ te liggen.

Definitie 2.1. Een dynamisch systeem dat behoort bij het triple (X, T, T_0) is een verzameling $B(X, T)$ van functies gedefinieerd op T en met waarden in X zodanig dat

- 1) $\phi_\tau \in B(X, T)$ zodra $\phi \in B(X, T)$, $\tau \in T_0$
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0} \phi(\tau + t) = \phi(\tau)$, $\phi \in B(X, T)$, $\tau \in T_0$.

De functies $\phi \in B(X, T)$ zullen we oplossingen en ϕ_τ banen noemen.

Definitie 2.2. Zij $B(X, T)$ een dynamisch systeem. Voor $\phi, \psi \in B(X, T)$ zeggen we dat de oplossing ψ in het oneindige naar ϕ nadert indien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\psi(t), \phi(t)) = 0.$$

Definitie 2.3. Zij $B(X, T)$ een dynamisch systeem. Een oplossing $\psi \in B(X, T)$ heet begrensd t.o.v. $\phi \in B(X, T)$ als

$$\rho(\psi, \phi) = \sup_{t \in T} \rho(\psi(t), \phi(t)) < \infty.$$

Als $\phi(t) \equiv 0$ voor alle $t \in T$ dan zeggen we dat ψ een begrensde oplossing is.

Voor iedere $\tau \in T_0$ noemen we $B(\tau)$ de deelverzameling van X

$$B(\tau) = \{\phi(\tau) : \phi \in B(X, T)\}.$$

$B(\tau)$ kunnen we beschouwen als de verzameling van beginwaarden van de banen ϕ_τ , $\phi \in B(X, T)$,

Behorende bij iedere $\tau \in T_0$ bestaat er een afbeelding A_τ van $B(\tau)$ in $B(X, T)$ gegeven door

$$A_\tau : \phi(\tau) \rightarrow \phi_\tau(t) \quad \phi \in B(X, T).$$

Het is duidelijk dat A_τ niet eenwaardig hoeft te zijn, tenzij de oplossingen van het systeem eenduidig bepaald zijn, hetgeen hier niet is geëist.

Voor iedere $\tau \in T_0$ nemen we aan dat een positief definitie functionaal ρ_τ gedefinieerd is op $B(\tau) \times B(\tau)$ en dat $B(\tau)$ de topologie heeft ge-

kregen die ρ_τ definieert. Deze functionaal ρ_τ dient als een maat voor de verstoring op het tijdstip $\tau \in T_0$ van het systeem, terwijl de positief definitieve functionaal ρ , gedefinieerd op $X \times X$ dient als maat voor de later volgende afwijkingen van het systeem.

Definitie 2.4. Een oplossing $\phi \in B(X, T)$ heet

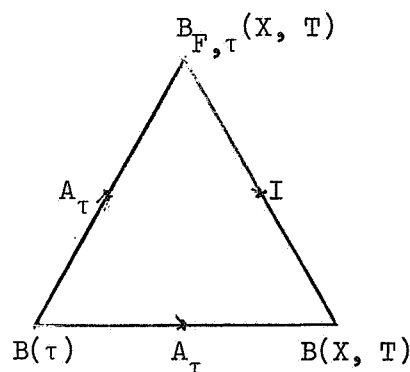
- 1) stabiel als, voor iedere $\tau \in T_0$, de afbeelding A_τ van $B(\tau)$ in $B(X, T)$ continu is in ϕ ,
- 2) uniform stabiel, als A_τ continu is in ϕ uniform in τ
- 3) asymptotisch stabiel, als ϕ stabiel is en als, voor iedere $\tau \in T_0$ en alle $\psi(\tau)$ in zekere omgeving van $\phi(\tau)$, $A_\tau(\psi(\tau))$ naar ϕ_τ nadert in het oneindige.

Een belangrijk criterium voor stabiliteit levert Lyapunov's directe methode. Laten $F_{\tau,t}$, met $t \in T$, $\tau \in T_0$, positief definitieve functionalen voorstellen, gedefinieerd op $X \times X$ en laat $B_{F,\tau}(X, T)$ de verzameling $B(X, T)$ voorstellen, voorzien van de topologie gegeven door de functionalen

$$F_\tau(\psi, \phi) = \sup_{t \in T} F_{\tau,t}(\psi(t), \phi(t)) \quad \phi, \psi \in B(X, T).$$

Beschouw nu $B_{F,\tau}(X, T)$ als een tussenstap tussen $B(\tau)$ en $B(X, T)$ en bekijk de afbeeldingen

- 1) A_τ van $B(\tau)$ naar $B_{F,\tau}(X, T)$
- 2) identieke afbeelding I van $B_{F,\tau}(X, T)$ naar $B(X, T)$



Als A_τ continu is in ϕ van $B(\tau)$ naar $B_{F,\tau}(X, T)$ en I continu is van $B_{F,\tau}(X, T)$ naar $B(X, T)$ dan is A_τ continu in ϕ van $B(\tau)$ naar $B(X, T)$. Als dit geldt voor iedere $\tau \in T_0$ dan is ϕ stabiel. Omgekeerd, wanneer

ϕ stabiel is bestaat er altijd zo'n functionaal $F_{\tau,t}$ want we kunnen altijd $F_{\tau,t}$ gelijk aan ρ stellen op $X \times X$.

We hebben dus bewezen:

Stelling 2.1. De oplossing $\phi \in B(X, T)$ is dan en slechts dan stabiel wanneer er positief definitieve functionalen $F_{\tau,t}$ bestaan, met $t \in T$, $\tau \in T_0$, gedefinieerd op $X \times X$ waarvoor geldt:

- 1) Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een $\delta(\varepsilon, \tau) > 0$ te vinden zodanig dat

$$F_{\tau}(\psi_{\tau}, \phi_{\tau}) < \varepsilon \quad \text{als} \quad \rho_{\tau}(\psi(\tau), \phi(\tau)) < \delta$$

- 2) Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een $\delta(\varepsilon, \tau) > 0$ te vinden zodanig dat

$$\rho(\psi_{\tau}, \phi_{\tau}) < \varepsilon \quad \text{als} \quad F_{\tau}(\psi_{\tau}, \phi_{\tau}) < \delta.$$

Deze stelling, zo geformuleerd door Gilbert en Knops [5] is algemener dan de klassieke stelling van Lyapunov en de latere van Zubov [1] en Movchan [2.3].

Daar wordt deze stelling geformuleerd als boven met i.p.v. de eisen 1 en 2 de eisen 3 en 4:

- 3) Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een $\delta(\varepsilon, \tau) > 0$ te vinden zodanig dat

$$F_{\tau,0}(\psi(\tau), \phi(\tau)) < \varepsilon \quad \text{als} \quad \rho_{\tau}(\psi(\tau), \phi(\tau)) < \delta$$

- 4) $F_{\tau,t}(\psi_{\tau}(t), \phi_{\tau}(t))$ is niet stijgend m.b.t. t

Als aan deze eisen voldaan is, is automatisch al aan eis 1) voldaan. Wanneer stabiliteit optreedt houdt eis 4) in, dat $F_{\tau}(\psi_{\tau}, \phi_{\tau}) < \infty$ moet zijn voor alle $\psi \in B(X, T)$. Aangezien in voorbeelden als Lyapunov functionaal vaak de totale energie wordt genomen, moet in dat geval deze energie eindig zijn.

Een dergelijke eis is in deze aanpak niet nodig. Voor stabiliteit komt hier alleen aan de orde het gedrag van het systeem in of in de buurt van de oplossing, waarvan de stabiliteit wordt onderzocht.

De voorwaarde 2) uit stelling 2.1 komt neer op een continue inbedding van $B_{F,\tau}(X, T)$ in $B(X, T)$. Deze inbedding kan bereikt worden

met behulp van ongelijkheden zoals bijvoorbeeld die van Sobolev. In het artikel van Knops en Wilkes [4] worden een aantal van dergelijke ongelijkheden behandeld.

3. Voorbeeld uit de elasticiteitstheorie.

We zullen een voorbeeld behandelen, dat lineair is. De differentiaalvergelijking, die de beweging beschrijft van een staaf, die belast wordt door een samendrukkende kracht P , luidt

$$u_{xxxx} + \beta u_{xx} + \gamma u_{tt} = 0 \quad (3.1)$$

waarbij $\beta = P/\alpha$, $\gamma = \mu/\alpha$, terwijl α de buigingstijfheid en μ de lineaire dichtheid voorstelt. ($\beta > 0$)

We zullen twee gevallen van randvoorwaarden bespreken, nl.

A) staaf met vaste uiteinden:

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = 1 \quad (3.2)$$

B) staaf die aan de uiteinden ingeklemd is:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = 1 \quad (3.3)$$

We onderzoeken de stabiliteit van de evenwichtspositie $u = 0$ in deze beide gevallen. Als verzameling X nemen we de deelverzameling van $C(0, 1)$ bestaande uit reëel-waardige functies ψ gedefinieerd op het interval $[0, 1]$ en die voldoen aan

1) iedere ψ is continu en heeft continue afgeleiden t/m de 4^{de} orde

2) ψ voldoet aan de randvoorwaarden (3.2) resp. (3.3).

Daar X lineair is kiezen we als positief definitie functionaal de norm

$$\rho(\psi, 0) = \sup_{0 < x < 1} |\psi| \quad \psi \in C(0, 1)$$

Verder nemen we voor T het interval $[0, \infty)$ en $T_0 = T$.

Het dynamisch systeem $B(X, T)$ bestaat uit alle functies u die gedefinieerd zijn op $[0, \infty)$ en waarden aannemen in X , zodanig dat (3.1) vervuld is. De norm ρ induceert in $B(X, T)$ een metriek

$$\rho(u, 0) = \sup_{0 \leq t < \infty} \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \right) \quad (3.4)$$

Als $\tau \in T_0$ dan is $B(\tau)$ de deelverzameling van $x \in C(0, 1)$ van functies van de vorm $u(x, \tau)$. Voor iedere $\tau \in T_0$ nemen we dezelfde ρ_τ

$$\rho_\tau = \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_{xx}| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_t| \quad (3.5)$$

$$\text{en dezelfde } F_{\tau, t} = C \int_0^1 (u_{xx}^2 - \beta u_x^2 + \gamma u_t^2) dx \quad (3.6)$$

waarbij C een constante is. Men kan aantonen, door onder het integraalteken te differentieren en 2 X partieel te integreren, dat $F_{\tau, t}$ constant is als functie van t .

In geval A (staaf met vaste uiteinden) heeft de ruimte X het volgende volledig stelsel basis vectoren: $b_n = \sin n \pi x$ en iedere functie met X is dus voor te stellen als

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n \pi x.$$

Voor deze functies geldt:

$$\int_0^1 (u_{xx}^2 - \lambda u_x^2) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \pi^4 - \lambda n^2 \pi^2) \alpha_n^2 \geq 0 \text{ als } \lambda \leq \pi^2$$

of

$$\lambda \int_0^1 u_x^2 dx \leq \int_0^1 u_{xx}^2 dx \quad \text{als} \quad \lambda \leq \pi^2 \quad (3.7)$$

In geval B (staaf die is ingeklemd aan de uiteinden) heeft de ruimte X het volgende volledige stelsel basisvectoren: $b_n = 1 - \cos 2 \pi n x$ en iedere functie uit X is voor te stellen als:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (1 - \cos 2 \pi n x).$$

Voor deze functies geldt:

$$\int_0^1 (u_{xx}^2 - \lambda u_x^2) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (16n^4 \pi^4 - 4 \lambda n^2 \pi^2) \beta_n^2 \geq 0 \text{ als}$$

$$\lambda \leq 4 \pi^2$$

of

$$\lambda \int_0^1 u_x^2 dx \leq \int_0^1 u_{xx}^2 dx \quad \text{als } \lambda \leq 4 \pi^2 \quad (3.8)$$

Met behulp van de ongelijkheden (3.7), (3.8) en (1.3) en stelling 2.1 kunnen we nu gemakkelijk uitspraak doen over de stabiliteit van de nuloplossing voor het systeem.

Immers:

$$\begin{aligned} F_{\tau} (u, 0) &= \sup_{0 \leq t \leq \infty} F_{\tau, t} (u, 0) \\ &= \sup_{0 \leq t \leq \infty} C \int_0^1 (u_{xx}^2 - \beta u_x^2 + \gamma u_t^2) dx \\ &\geq \sup_{0 \leq t \leq \infty} C \int_0^1 \{ (\lambda - \beta) (u_x)^2 + \gamma u_t^2 \} dx \quad \begin{array}{l} \text{(wegens (3.7))} \\ \text{resp. (3.8)} \end{array} \\ &= \sup_{0 \leq t \leq \infty} (\lambda - \beta) C \int_0^1 u_x^2 dx \\ &\geq \sup_{0 \leq t \leq \infty} (\lambda - \beta) C \sup_{0 \leq x \leq 1} |u|^2 \quad \text{(wegens (1.3))} \\ &= C (\lambda - \beta) \rho^2 (u, 0) \end{aligned}$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned}
 F_{\tau}(u, 0) &\leq C \int_0^1 \{(u_{xx})^2 + \gamma (u_t)^2\} dx \\
 &\leq C \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_{xx}|^2 + C \gamma \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_t|^2 \\
 &\leq k \rho_0^2
 \end{aligned}$$

Hierbij is k een positieve constante.

Als $\beta < \lambda$ dan is aan de voorwaarden van stelling 2.1 voldaan.

Hieruit volgt dat voor het geval A (staaf met vaste uiteinden)

stabiliteit optreedt zolang $\beta < \pi^2$. Voor het geval B van de staaf met ingeklemde uiteinden treedt stabiliteit op zolang $\beta < 4\pi^2$.

De stabiliteit wordt hier dus aangetoond met behulp van ongelijkheden.

4. Stabiliteit en eenduidigheid.

Definitie 4.1. Is ϕ een oplossing van het dynamische systeem $B(X, T)$ dan zeggen we dat ϕ eenduidig is, als voor alle $\tau \in T_0$

$$\psi(\tau) = \phi(\tau) \quad \text{impliceert} \quad \psi_{\tau}(t) = \phi_{\tau}(t) \quad (t \in T, \tau \in T_0.)$$

Stelling 4.1. Als $\phi \in B(X, T)$ stabiel is, is hij eenduidig.

Bewijs. Neem aan dat ϕ niet eenduidig is en laat $\psi(t) \in B(X, T)$ zo gekozen worden dat $\psi(\tau) = \phi(\tau)$, terwijl $\psi_{\tau}(t) \neq \phi_{\tau}(t)$ voor zekere

$$\tau \in T_0, t \in T.$$

Aangezien ρ positief definit is geldt dan

$$\rho(\psi_{\tau}(t), \phi_{\tau}(t)) > 0 \quad \text{of} \quad \rho(\psi_{\tau}, \phi_{\tau}) > 0.$$

Daar ϕ stabiel is bestaat er bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat voor $x \in B(X, T)$ geldt dat

$$\rho(x_{\tau}, \phi_{\tau}) < \varepsilon \quad \text{wanneer} \quad \rho_{\tau}(x(\tau), \phi(\tau)) < \delta.$$

Als we $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho(\psi_\tau, \phi_\tau)$ nemen hebben we een evidente tegenspraak want

$$\rho_\tau(\psi(\tau), \phi(\tau)) = 0 < \delta$$

5. Instabiliteit.

Definitie 5.1. Een oplossing $\phi \in B(X, T)$ heet instabiel als voor zekere $\tau \in T_0$ de afbeelding A_τ van $B(\tau)$ naar $B(X, T)$ discontinu is in ϕ met betrekking tot de topologieën die op $B(\tau)$ en $B(X, T)$ gedefinieerd zijn resp. door ρ_τ en ρ .

Stelling 5.1. De oplossing $\phi \in B(X, T)$ is dan en slechts dan instabiel, wanneer er positief definitie functionalen $F_{\tau, t}$, $\tau \in T_0$, $t \in T$ bestaan, gedefinieerd op $X \times X$ zodanig dat

- 1) de afbeelding A_τ van $B(\tau)$ naar $B_{F, \tau}(X, T)$ discontinu is in ϕ voor zekere $\tau \in T_0$
- 2) de eenheids afbeelding I continu is van $B(X, T)$ naar $B_{F, \tau}(X, T)$

Bewijs: Zeer eenvoudig. Wordt aan de lezer overgelaten.

6. Stabiliteit en begrensdsheid.

Definitie 6.1. De afbeelding A_τ , met $\tau \in T_0$ heet begrensd met betrekking tot ρ_τ en ρ in $\phi \in B(X, T)$ wanneer er getallen M en N bestaan, die afhangen van ϕ en τ en waarvoor geldt dat

$$\rho(\psi_\tau, \phi_\tau) \leq N \quad \text{als} \quad \rho_\tau(\psi(\tau), \phi(\tau)) \leq M.$$

Duidelijk is, dat als ϕ stabiel is, A_τ begrensd is in ϕ voor alle $\tau \in T_0$.

Stelling 6.1. Zij X een lineaire, genormeerde ruimte. Dan geldt dat, indien ρ_τ en ρ normen zijn, een oplossing $\phi \in B(X, T)$ dan en slechts dan stabiel is wanneer iedere A_τ begrensd is in ϕ .

Om deze stelling te bewijzen, gebruiken we een lemma, dat in feite niets anders is dan een bekende stelling uit de functionaalanalyse, namelijk dat een lineaire operator dan en slechts dan continu is, als hij begrensd is.

Lemma 6.1. Neem aan X is een verzameling met de eigenschap dat $\alpha \phi \in X$ voor iedere postieve α , wanneer $\phi \in X$. Neem verder aan dat ρ_1 en ρ_2 positief definitie functionalen op X zijn die voldoen aan:

$$\rho_1(\alpha\phi) \leq \alpha \rho_1(\phi) \quad , \quad \rho_2(\alpha\phi) = \alpha \rho_2(\phi), \quad \phi \in X \quad , \quad \alpha > 0.$$

Als X_i de verzameling X aangeeft, voorzien van de topologie gedefinieerd door ρ_i ($i = 1, 2$) en A een afbeelding is van X op X zodanig dat $A(\alpha\phi) = \alpha A(\phi)$, $\phi \in X$, dan zijn de volgende beweringen equivalent:

- 1) A is continu van X_1 naar X_2 in 0.
- 2) de verzameling $\{ A(\phi) : \phi \in X_1, \rho_1(\phi) < 1 \}$ is begrensd in X_2 .
- 3) voor zekere positieve P_A geldt : $\rho_2(A(\phi)) \leq P_A \rho_1(\phi)$, $\phi \in X$.

Bewijs: 1) $\rightarrow$ 2). Als 2) niet zou gelden, dan bestond er een rij $\{ \phi_n \} \in X$ met $\rho_1(\phi_n) \leq 1$, terwijl $\rho_2(A(\phi_n)) > n$.

Als we nu stellen $\psi_n = \frac{\phi_n}{n}$ dan geldt

$\rho_2(A(\psi_n)) = \frac{1}{n} \rho_2(A(\phi_n)) > 1$ terwijl $\rho_1(\psi_n) \leq \frac{1}{n}$. Dit is in strijd met de continuïteit van A in 0.

2) $\rightarrow$ 3). Er bestaat een $\beta > 0$ zodanig dat als $\rho_1(\psi) = 1$ er volgt $\rho_2(A\psi) \leq \beta$

Neem nu een willekeurige functie ϕ . We noemen $\phi_e = \frac{\phi}{\rho_1(\phi)}$

Dan geldt : $\rho_1(\phi_e) = \rho_1\left(\frac{\phi}{\rho_1(\phi)}\right) \leq 1$

Dus geldt dan ook:

$$\rho_2(A\phi_e) \leq \beta. \quad \text{Vermenigvuldigen we beide leden met } \rho_1(\phi)$$

$$\rho_1(\phi) \rho_2(A\phi_e) \leq \beta \rho_1(\phi)$$

Wegens de homogeniteit van ρ_2 en A kunnen we dus schrijven:

$$\rho_2(A(\rho_1(\phi) \phi_e)) \leq \beta \rho_1(\phi) \quad \text{of}$$

$$\rho_2(A\phi) \leq \beta \rho_1(\phi).$$

Dus $\rho_A = \beta$ voldoet.

3) $\rightarrow$ 1) Triviaal.

Bewijs van stelling 6.1.

Aangezien X lineair is hoeven we slechts lemma 7.1 toe te passen.

De stelling volgt uit de equivalentie van 1) en 2).

Literatuur

1. V.I. Zubov Methods of A.M. Lyapunov and their application.
Noordhoff 1964
2. A.A. Movchan: On Lyapunov's direct method in problems of stability of elastic systems.
Appl. Math. Mech. N.Y. 23, 686, (1959)
3. A.A. Movchan: Stability of processes with respect to two metrics.
Appl. Math. Mech. N.Y. 24, 1506 (1960)
4. R.J. Knops & E.W. Wilkes: On Movchan's theorems for stability of continuous systems.
Int. J. Eng. Sci 4, 303 (1966)
5. J.E. Gilbert & R.J. Knops: Stability of general systems.
Arch. Rat. Mech. Anal. 25, 271, (1967)

Aanvulling VI. Stabiliteit en continuïteit met betrekking tot twee metrieken.

Ten aanzien van blz. 67 geldt het volgende:

Het is gebleken dat naast de vectoren $b_n = 1 - \cos 2 \pi n x$ nog een stelsel onafhankelijke functies $c_n = \cos \pi x - \cos(2n+1) \pi x$ bestaat, zodanig dat $\{b_n\}$ en $\{c_n\}$ samen een volledig stelsel basisvectoren voor X leveren.

Iedere functie uit X is dus voor te stellen als

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (1 - \cos 2 \pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \{ \cos \pi x - \cos(2n+1) \pi x \}.$$

De ongelijkheid $\lambda \int_0^1 u_x^2 dx \leq \int_0^1 u_{xx}^2 dx$ als $\lambda \leq L \pi^2$

blijft onverminderd van kracht.

Colloquium Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

M. Strasberg

VII. Periodieke oplossingen van niet-lineaire, niet-autonome en niet kritische stelsels van differentiaal vergelijkingen.

1. Samenvatting

Beschouwen wij een niet-lineair, niet-autonoom stelsel van n differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = A(t) x + b(x, t), \quad (S)$$

waarin A en b periodiek zijn in t met de periode T . Indien het homogene lineaire stelsel $\dot{x} = A(t) x$ niet kritisch is, d.w.z. dat het geen niet-triviale periodieke oplossingen met periode T heeft, dan is elke periodieke oplossing in t met de periode T van (S) een oplossing van de niet-lineaire integraal vergelijking

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) b(x(s), s) ds \quad (I)$$

en omgekeerd. $G(t, s)$ is de $n \times n$ Green-matrix van het grenswaarde probleem

$$\dot{X} = AX; \quad X(0) = X(T); \quad X \text{ is een } n \times n \text{ matrix.}$$

Onder bepaalde voorwaarde voor b verzekert de stelling van Schauder-Mazur het bestaan van een oplossing van (I). Indien het stelsel (S) bovendien zwak niet-lineair is, d.w.z. van het type $\dot{x} = AX + \alpha b(x, t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, volgt uit de wel bekende kontraktie-stelling van Banach, voor een voldoende kleine waarde van α , het bestaan van één enkele oplossing van (I), welke men theoretisch iteratief kan afleiden. Praktisch geeft deze methode een benaderende oplossing en een bovengrens voor de fout.

2. Stelsels van lineaire differentiaalvergelijkingen [1], [2]

Beschouwen wij het stelsel (N.H.) van n niet-homogene lineaire differentiaal vergelijkingen

$$\dot{x} = A(t) x + b(t), \quad (\text{N.H.})$$

waarin

- 1.) $A(t) = (a_{ij}^j(t))$ een $n \times n$ matrix is, de a_{ij}^j zijn continue reële functies in de reële veranderlijke $t \in I = [a, b]$
- 2.) $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, de x^i zijn reële functies met als afgeleiden $\dot{x}^i$: $\dot{x}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$.
- 3.) $b(t) = (b^1(t), \dots, b^n(t))$, de b^i zijn reële continue functies in de reële veranderlijke $t \in I = [a, b]$

Wij associëren aan het stelsel (N.H.) het lineaire homogene stelsel (H)

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t). \quad (\text{H})$$

Verder associëren wij aan het stelsel (H) het lineaire homogene stelsel (M.H.)

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad (\text{M.H.})$$

waarin $X(t) = (x_{ij}^i(t))$ een $n \times n$ matrix is, de x_{ij}^i zijn reële functies met de afgeleiden $\dot{x}_{ij}^i(t)$ en $\dot{X}(t) = (\dot{x}_{ij}^i(t))$

2.1 Cauchy Probleem en Cauchy-Resolvente [1]

Definitie 1

Men noemt de Cauchy Resolvente $R(t, t_0)$ van het stelsel (N.H.) de $n \times n$ matrix oplossing van het stelsel (M.H.), deze neemt de waarde E (de eenheidmatrix) aan voor $t = t_0$. Dit betekent $R(t_0, t_0) = E$. Deze oplossing bestaat en is eenduidig in I . [1].
Voor wat volgt stellen wij: $R(t) = R(t, 0)$.

Eigenschappen van de Cauchy Resolvente

De oplossing van (H) die de waarde x_0 aanneemt voor $t = t_0$ wordt gegeven door

$$x(t) = R(t, t_0) x_0, \quad (1)$$

$$\det R(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t (\text{Spoor } A(u)) du.$$

$$R(t, t_0) = R(t, t_1) \cdot R(t_1, t_0) \quad \forall t, t_0, t_1 \in I = [a, b]$$

$$R^{-1}(t, t_0) = R(t_0, t); \quad R(t, t_0) = R(t) R^{-1}(t_0).$$

Indien A onafhankelijk van t ($\in I$) is, heeft men;

$$R(t+t_1, t_0+t_1) = R(t, t_0) = \exp A(t-t_0), \text{ waaruit volgt}$$

$$R^{-1}(t) = R(-t), \quad R(t+t_0) = R(t) R^{-1}(t_0), \quad R(t, t_0) = R(t-t_0).$$

Indien A periodiek is met de periode T heeft men

$$R(t+T, t_0+T) = R(t, t_0), \quad \forall t, t_0 \in I = [0, T], \text{ waaruit volgt}$$

$$R^{-1}(T) = R(-T), \quad R(t+T) = R(t) R(T), \quad R(t, T) = R(t-T).$$

Bewering 1

De algemene oplossing van (N.H.) wordt gegeven door

$$x(t) = R(t, t_0) c + \int_0^t R(t, s) b(s) ds. \quad (2)$$

Bewijs

Uitgaande van formule (1) gebruikt men de methode "der variatie van de konstante" van Lagrange.

Opmerkingen:

De algemene oplossing wordt ook gegeven door

$$x(t) = R(t) c + \int_0^t R(t,s) b(s) ds.$$

Indien A onafhankelijk van t is wordt de algemene oplossing gegeven door

$$x(t) = R(t-t_0) c + \int_{t_0}^t R(t-s) b(s) ds$$

of

$$x(t) = R(t) c + \int_0^t R(t-s) b(s) ds.$$

2.2. Periodiek niet-kritisch Probleem en de periodieke Green Resolvente

Veronderstellen wij A en b periodiek met de periode T, dan zoeken wij een periodieke oplossing met de periode T van (N.H.). Voor wat volgt schrijven wij steeds periodiek voor periodiek met de periode T.

Een periodiek probleem wordt uitgedrukt door limiet-voorwaarden van het type

$$x(0) = x(T) \text{ voor de stelsels } (H) \text{ en } (N.H.) \quad (3)$$

$$X(0) = X(T) \quad " \quad (M.H.) \quad (4)$$

Stellen wij nog $I = [0, T]$

Definitie 2

Het periodiek stelsel (H) is niet-kritisch (of beter niet kritisch in T), indien het slechts de triviale oplossing (nul oplossing) heeft die aan (3) voldoet. Opdat dit waar zou zijn is het nodig en voldoende dat

$$\det (E - R(T)) \neq 0 \quad (E \text{ is de } nxn \text{ eenheidsmatrix})$$

Definitie 3

Men noemt de periodieke Green Resolvente $G(t,s)$ van het stelsel (N.H.) de $n \times n$ matrix, "elementaire oplossing" van het periodieke stelsel (M.H.) die voldoet aan (4.). Dit betekent dat:

- a) $G(t,s)$ is continu $\forall t \in I - s$
- b) $G(t,s)$ is diskontinu voor $t = s$ en $G(s+0,s) - G(s-0,s) = E$
- e) $G(t,s)$ is oplossing van (M.H.) $\forall t \in I - s$, en voldoet aan (4.).

Bewering 2

- a) Indien het periodieke stelsel (H) niet-kritisch is bestaat er één en slechts één enkele periodieke Green resolvente $G(t,s)$ van het periodiek stelsel (N.H.) gegeven door

$$\begin{aligned} G(t,s) &= G_1(t,s) = R(t) (E - R(T))^{-1} R^{-1}(s) \text{ voor } 0 \leq s < t \leq T, \\ G(t,s) &= G_2(t,s) = R(t) (E - R(T))^{-1} R(T) R^{-1}(s) \text{ voor } 0 \leq t < s \leq T. \end{aligned}$$

- b) Vervolgens heeft het periodieke stelsel (N.H.) één en slechts één periodieke oplossing gegeven door

$$x(t) = \int_0^t G(t,s) b(s) ds. \quad (7)$$

Bewijs

- a) Daar $G(t,s)$ een kontinu oplossing van (M.H.) moet zijn voor alle $t \in I - s$ stellen wij

$$\begin{aligned} G(t,s) &= G_1(t,s) = R(t) C_1(s) \text{ voor } 0 \leq s < t \leq T \\ G(t,s) &= G_2(t,s) = R(t) C_2(s) \text{ voor } 0 \leq t < s \leq T \end{aligned}$$

waarin $R(t)$ reeds gedefinieerd is, en $C_1(s)$ en $C_2(s)$ verder bepaald zullen worden.

Uit $G(s+0,s) - G(s-0,s) = E$ verkrijgt men $C_1(s) - C_2(s) = R^{-1}(s)$,

uit $G(0,s) = G(T,s)$ verkrijgt men $C_2(s) = R(T) C_1(s)$.

$$\text{Dus } C_1(s) = (E - R(T))^{-1} R^{-1}(s),$$

$$C_2(s) = R(T) (E - R(T))^{-1} R^{-1}(s) = (E - R(T))^{-1} R(T) R^{-1}(s).$$

$$\text{Wij merken op dat } G_2(t, s) - G_1(t, s) = R(t, s), \quad (8)$$

$$G(t+T, s+T) = G(t, s).$$

b) Men gaat uit van de algemene oplossing van (N.H.) gegeven door (2):

$$x(0) = c$$

$$x(T) = R(T) c + \int_0^T R(T, s) b(s) ds \quad (R(T, s) = R(T) R^{-1}(s))$$

en bepaalt c opdat $x(0) = x(T)$, ermee rekening houdend dat het stelsel (H) niet-kritisch is, dan is $c = \int_0^T (E - R(T))^{-1} R(T, s) b(s) ds$.

Wij vervangen in (2)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 R(t) (E - R(T))^{-1} R(T, s) b(s) ds + \int_0^t R(t, s) b(s) ds \\ &= \int_0^T G_2(t, s) b(s) ds + \int_0^t R(t, s) b(s) ds \end{aligned}$$

rekening houdend met de opmerking (8)

$$x(t) = \int_0^t G_1(t, s) b(s) ds + \int_t^T G_2(t, s) b(s) ds = \int_0^T G(t, s) b(s) ds.$$

3. Niet-lineaire, niet autonome, en niet kritische stelsels differentiaalvergelijkingen

Voor het vervolg bekijken wij een stelsel van skalair differentiaalvergelijkingen als een vektoriele differentiaalvergelijkingen

3.1. De niet-lineaire integraal vergelijking van Hammerstein [4], [5]

Wij beschouwen de T -periodieke niet lineaire en niet autonome differentiaal vergelijking

$$\dot{x} = A(t) x + b(x, t) \quad (S).$$

- a) A is T -periodiek, zodanig dat de vergelijking (H) T -niet-kritisch is
- b) $b(u, t) = (b^1(u^1, \dots, u^n, t), \dots, b^n(u^1, \dots, u^n, t))$,
de functies b^i zijn continu in $(u, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, en T -periodiek.
- Uit bewering 2 volgt:

Bewering 3

Iedere T -periodieke oplossing van de vergelijking (S) is een oplossing van de niet-lineaire integraal vergelijking van het type van Hammerstein

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) b(x(s), s) ds \quad (I)$$

en omgekeerd.

Deze integraal vergelijking (I) laat ons toe de niet-lineaire Hammerstein operator h in te voeren in de vektorruimte $\mathcal{C}(T)$ van de continu en T -periodieke reële vektorfuncties. De oplossingen van (I) zijn dan de fix points van deze operator.

3.2. De Vektorruimte $\mathcal{C}(T)$

$(I, \mathbb{R}^n)$ stelt de vektorruimte van de continue functies van $I = [0, T]$ en $\mathbb{R}^n$ voor; $\mathcal{C}(T)$ is de deelvektorruimte van de functies van $(I, \mathbb{R}^n)$ die voldoen aan $x(0) = x(T)$ d.w.z.

$$\mathcal{C}(T) = \left\{ x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \mid x(0) = x(T) \right\}$$

Zij $|| \cdot ||$ een willekeurige norm op $\mathbb{R}^n$, op $\mathcal{C}(T)$ wordt de norm $||| \cdot |||$ voor de gelijkmatige convergentie gedefinieerd door

$$||| x ||| = \max_{t \in I} || x(t) ||, \quad x \in \mathcal{C}(T).$$

Met deze norm is de vektorruimte $\mathcal{C}(T)$ een reële Banachruimte.

Wij stellen voor het vervolg

$$B_r = \left\{ u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq r \right\},$$

$$B_r = \left\{ x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{C}(T) \mid \|x\| \leq r \right\}.$$

Opmerkingen

- 1) In de praktijk neemt men als norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$, een der drie equivalente normen

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|; \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |u_i|.$$

- 2) Men verifieert gemakkelijk dat, indien x een integreerbare functie is van $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$ en $\|\cdot\|$ een der drie normen is, dat men heeft

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt.$$

- 3) Indien $A = (a_{ij}^j)$ een $n \times n$ matrix is, dan wordt hierdoor in de kanonische basis van $\mathbb{R}^n$ een lineaire (begrensde) continue operator (die ook door A voorgesteld wordt) gedefinieerd van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, d.w.z.

$$\|Au\| \leq M \|u\| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad M < \infty.$$

De norm van A wordt gedefinieerd door

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

men heeft dan $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

Men bewijst [3, blz. 174] dat

$$||A||_1 = \max_{j=1, \dots, n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right); ||A||_2 \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; ||A||_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

3.3. De operatoren van Nemycku, Green and Hammerstein [4], [5]

Definitie 4

De niet-lineaire operator f (van Nemycku) wordt gedefinieerd door

$$y = f(x) \quad \text{met} \quad y(t) = b(x(t), t) .$$

De lineaire operator g (van Green) wordt gedefinieerd door

$$y = g(x) \quad \text{met} \quad y(t) = \int_0^T G(t,s) x(s) ds .$$

De niet lineaire operator h (van Hammerstein) wordt gedefinieerd door

$$y = h(x) = g(f(x)) \quad \text{d.w.z.} \quad g(t) = \int_0^T G(t,s) b(x(s), s) ds .$$

Tengevolge van de periodiciteit van de functies G en b en van de continuïteit van b , werken deze operatoren in $\mathcal{C}(T)$.

Aangezien de terminologie van niet-lineaire operatoren niet vast bepaald is, herhalen wij wat door de Soviet-wiskundigen [4], [5] aangenomen werd.

Definitie 5

Zij E een reële Banach-ruimte, met de norm $||\cdot||$, h een operator in E .

Men zegt dat

- h begrensd is indien het beeld van elk begrensd deel begrensd is.
- h kompakt is indien het beeld van elk begrensd deel relatief-kompakt is (d.w.z. bevat is in een kompakt deel).

Daar in een metrische ruimte een relatiefkompakt deel begrensd is, is een kompakte operator begrensd.

- h volkontinu is indien h kompakt en kontinu is.

Indien f een kontinu en begrensde operator is in E, en g een volkontinu operator in E, dan is $h. = g(f.$ een volkontinu operator in E.

Over de lineaire operatoren herinneren wij dat een lineaire operator g in E begrensd is dan en slechts dan als

$$||g(x)|| < M ||x|| \quad \forall x \in E, \quad M < \infty.$$

De norm van g , $||g||$, wordt gedefinieerd door

$$||g|| = \sup_{x \in E} \frac{||g(x)||}{||x||}$$

en men heeft $||g(x)|| \leq ||g|| ||x||$.

Een lineaire operator g in E is begrensd dan en slechts dan als deze kontinu is, waaruit volgt dat een lineaire kompakte operator volkontinu is. Om te bewijzen dat de niet-lineaire operator h volkontinu is volstaat het te bewijzen dat de niet-lineaire operator f kontinu en begrensd is en dat de lineaire operator g kompakt is. De volgende bewering karakteriseert de lineaire integraal operatoren.

Bewering 4

a) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0$ zodanig dat:

$$\int_0^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| ds \leq \epsilon \text{ voor } |t_2 - t_1| \leq \eta(\epsilon).$$

b) Indien $m(t) = \int_0^T ||G(t, s)|| ds$; m is een continue functie van I in $\mathbb{R}$, dus begrensd.

Bewijs

a) Zij $0 < t_1 < t_2$,

$$\int_0^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| \, ds = \int_0^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| \, ds ,$$

maar

$$\int_0^{t_1} ||\cdot|| \, ds = \int_0^{t_1} ||G_1(t_2, s) - G_1(t_1, s)|| \, ds ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} ||\cdot|| \, ds = \int_{t_1}^{t_2} ||G_1(t_2, s) - G_2(t_1, s)|| \, ds \leq \int_{t_1}^{t_2} (||G_1(t_2, s)|| + ||G_2(t_1, s)||) \, ds ,$$

$$\int_{t_2}^T ||\cdot|| \, ds = \int_{t_2}^T ||G_2(t_2, s) - G_2(t_1, s)|| \, ds .$$

Aangezien de functies G_1 en G_2 continu zijn respectievelijk in de driehoeken $T_1 = \{0 \leq t \leq T; 0 \leq s \leq t\}$, $T_2 = \{0 \leq t \leq T; t \leq s \leq T\}$ zijn ze gelijkmatig continu en begrensd waaruit volgt dat

$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \bar{n}(\epsilon_1)$ zodanig dat

$\forall s \in [0, t_1] : ||G_1(t_2, s) - G_1(t_1, s)|| < \epsilon_1$ voor $|t_2 - t_1| \leq \bar{n}(\epsilon_1)$,

$\forall s \in [t_2, T] : ||G_2(t_2, s) - G_2(t_1, s)|| < \epsilon_1$ voor $|t_2 - t_1| \leq \bar{n}(\epsilon_1)$,

$\forall s \in [t_1, t_2], \exists N < \infty$ zodanig dat

$$||G_1(t_2, s)||, ||G_2(t_1, s)|| \leq N.$$

waaruit volgt dat

$$\int_0^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| \, ds \leq \epsilon_1 t + 2N(t_2 - t_1) + \epsilon_1(T - t_2)$$

en voor $\epsilon_1 = \epsilon - \frac{2N(t_2 - t_1)}{T + t_1 - t_2}$ heeft men

$$\int_0^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| \leq \epsilon \quad \text{voor } ||t_2 - t_1|| \leq \eta(\epsilon) = \bar{\eta}(\epsilon_1) .$$

b) Voor $t_1, t_2 \in I$ $t_1 < t_2$:

$$m(t_2) - m(t_1) = \int_0^T (||G(t_2, s)|| - ||G(t_1, s)||) ds ,$$

$$|m(t_2) - m(t_1)| \leq \int_0^T \left| ||G(t_2, s)|| - ||G(t_1, s)|| \right| ds ,$$

$$|m(t_2) - m(t_1)| \leq \int_0^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| ds .$$

Uit (a) volgt dat m een continue functie is van I in $\mathbb{R}$, en aangezien I compact is, is m begrensd.

Wij stellen

$$M = \max_{t \in I} |m(t)| = \max_{t \in I} \int_0^T ||G(t, s)|| ds .$$

Bewering 5

Indien b een continue T -periodieke, functie is van $\mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}^n$, dan is de niet-lineaire operator h van Hammerstein volcontinu.

Bewijs

a) De niet-lineaire operator f is continu en begrensd, daar b een continuefunctie is van $\mathbb{R}^{(n)} \times I$ in $\mathbb{R}^n$ en de beperking van b op elke compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n \times I$ een gelijkmatige continue functie is.

b) de lineaire operator g is compact. Bewijzen wij eerst dat g begrensd is:

Zij $y = g(x)$ en men heeft achtereenvolgens

$$y(t) = \int_0^T G(t, s) x(s) ds ,$$

$$||y(t)|| \leq \int_0^T ||G(t, s)|| ||x(s)|| ds ,$$

$$|||y||| \leq \left(\max_{t \in I} \int_0^T ||G(t, s)|| ds \right) |||x||| ,$$

$$|||g(x)||| \leq M |||x||| \quad (\text{met } M = \max_{t \in I} \int_0^T ||G(t,s)|| \, ds),$$

d.w.z. $|||g||| \leq M.$

Dus heeft men voor elke $B_r \subset \mathcal{C}(T)$ dat $g(B_r)$ begrensd is door $B_{r'}$, (met $r' = M r$).

Wij bewijzen verder dat $g(B_r)$ equikontinu is.

Zij $y \in g(B_r)$, $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$, dan heeft men achtereenvolgens

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^T (G(t_2, s) - G(t_1, s)) x(s) \, ds, \quad x \in B_r;$$

$$||y(t_2) - y(t_1)|| \leq \left(\int_0^T ||G(t_2, s) - G(t_1, s)|| \, ds \right) r.$$

en uit bewering 4 volgt: $\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0$ zodanig dat

$$||y(t_2) - y(t_1)|| \leq \epsilon \quad \text{voor } t_2 - t_1 \leq \eta(\epsilon),$$

dus $g(B_r)$ is equikontinu. Uit de stelling van Ascoli-Arzelà [3, blz. 81] volgt dat $g(B_r)$ relatiefkompakt is.

Daar ieder begrensd deel, door zijn definitie, begrepen is in een B_r , en ieder deel v.e. relatiefkompakt deel relatiefkompakt is, is de lineaire operator g kompakt.

Opmerking

Indien b een funktie is van $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$, T -periodiek, en voldoet ($\forall t \in I$) aan een Lipschitz voorwaarde van het type

$$||b(u_2, t) - b(u_1, t)|| \leq h(r) ||u_2 - u_1|| \quad (2)$$

$$\forall u_1, u_2 \in B_r \quad \text{met } L(r) < \infty,$$

dan is b een continue funktie van $\mathbb{R}^n \times I$ in $\mathbb{R}^n$ en f is een continue en begrensde operator van $\mathcal{C}(T)$ in $\mathcal{C}(T)$.

Wij herinneren eraan gesteld te hebben:

$$M = \max_{t \in I} \int_0^T ||G(t,s)|| ds ; \quad R(r) = \max_{(u,t) \in B_r \times I \subset \mathbb{R}^n \times I} ||b(u,t)|| ,$$

(dan $|||g||| \leq M$)

4. Stellingen

4.1 Stelling 1. Existentiestelling

Indien benevens de veronderstellingen van bewering 5 er een $r > 0$ bestaat zodanig dat

$$MR(r) \leq r , \quad (*)$$

dan bestaat er tenminste één oplossing $\hat{x}$ van de niet-lineaire integraal vergelijking (I) met $|||\hat{x}||| \leq r$.

Bewijs

Laat $x \in B_r$, men heeft $y = h(x) = g(f(x))$

$$|||y||| \leq |||g||| |||f(x)||| \leq M R(r) \leq r ,$$

waaruit volgt dat $h(B_r) \subset B_r$.

Daar h volcontinu is, volgt met de Stelling van Schauder-Mazur [4], [5], volgt dat er tenminste één $\hat{x} \in B_r$ bestaat zodanig dat $h(\hat{x}) = \hat{x}$

Opmerking

De veronderstelling (*) verzekert het bestaan van een B_r van $\mathcal{G}(T)$, zodanig dat $h(B_r) \subset B_r$. In [6] vervangt M.J. Sonnenschein (*) door de volgende veronderstelling (welke niet equivalent is)

$$\lim_{||u|| \rightarrow \infty} \frac{||b(u,t)||}{||u||} = 0 \quad \text{gelijkmatig } \forall t \in I$$

en hij bewijst het bestaan in dit geval van een $r > 0$ zodanig dat

$$h(B_r) \subset B_r.$$

4.2 Stelling 2 - Existentie - een eenduidigheidsstelling

Indien

- 1) b een functie is van $\mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}$, T -periodiek, en die voor $\forall t \in I$ aan een Lipschitz voorwaarde van het type (L) voldoet.
- 2) een $r > 0$ bestaat zodanig dat

$$MR(r) \leq r \quad (*)$$

$$M_L(r) \leq k < 1 \quad (**)$$

Dan bestaat er één en slechts één oplossing x van de niet-lineaire integraalvergelijking I en $||\hat{x}|| \leq r$. Verder is $\hat{x}$ de limiet voor de norm $||\cdot||$, van de iteratie rij $x_n = h(x_{n-1})$

Bewijs

Zoals voor Stelling 1, beeldt de ongelijkheid (*) $h(B_r)$ in B_r af. Uit de ongelijkheid (**) volgt dat h een kontraktie operator is en door toepassing van de kontraktie stelling van Banach [3] volgt het resultaat.

Opmerking: voor de zwak niet-lineaire stelsels.

Indien $b(u, t) = \alpha b_1(u) + b_2(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Men zegt dat het stelsel (S) zwak niet-lineair is.

In dit geval nemen wij

$$B_2(t) = \int_0^T G(t, s) b_2(s) ds$$

$$R_1(r) = \max_{u \in B_r} ||b_1(u)||$$

$L_1(r)$ is de Lipschitz konstante voor $b_1(u)$ in B_r .

De ongelijkheden (*) en (**) worden:

$$|\alpha| MR_1(r) + |||B_2||| \leq r ,$$

$$|\alpha| ML_1(r) \leq k < 1 .$$

Hiermee kan in bepaalde gevallen een eenvoudige schatting van het interval van de "kleine parameter" α gegeven worden, waarvoor er een eenduidige oplossing van (I) bestaat.

Literatuur

- 1 H. Cartan: Calcul différentiel, Collection Methodes, Herman, Paris, 1967
- 2 E.A. Coddington - N. Levinson: Theory of Ordinary - Differential Equations MacGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1955.
- 3 L. Collatz: Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, New York 1966.
- 4 M.A. Krasnosel'ski: Topological methods in the theory of non-linear integral equations, Pergamon-Press, 1964.
- 5 V.V. Vainberg: Variational methods for the study of nonlinear operators Holden-Day Inc., 1964.
- 6 J. Sonnenschein: Solutions périodiques de certaines systemes d'equations différentielles non linéaires, Memoires et Publications de la Societé des Sciences, des Artz et des Lettres du Hainaut, T. 78 (1964) p. 121-124.

Colloquium Niet-lineaire differentiaal vergelijkingen.

A.H.P. van der Burgh

VIII De Asymptotische Methode van Krylov-Bogoljubov-Mitropolski
(vervolg van II)

2. Een eerste en tweede asymptische benadering.

Wij beschouwen de vectordifferentiaalvergelijking:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (1)$$

$$t = 0; \quad x = x_0.$$

X en x zijn n -dimensionale vectoren en ε is een kleine parameter. Daarnaast beschouwen wij het zogenaamde geassocieerde (autonome) stelsel:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (2)$$

$$t = 0; \quad \xi = x_0.$$

De vectorfunctie $X(t, x)$ voldoet aan de volgende voorwaarden:

- (a) Voor een gebied $D \subset E_n$ bestaan de positieve konstanten M en λ zodanig dat voor alle reële $t \geq 0$ en alle x, x' en x'' uit D de volgende ongelijkheden gelden:

$$||X(t, x)|| \leq M, \quad ||X(t, x') - X(t, x'')|| \leq \lambda ||x' - x''||.$$

- (b) uniform voor $x \in D$ bestaat de limiet:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x). \quad (3)$$

Als $x(t)$ en $\xi(t)$ oplossingen zijn van de differentiaalvergelijkingen (1) resp. (2) dan geldt de volgende, door Bogoljubov bewezen stelling: Bij iedere willekeurige kleine positieve ρ en η en bij iedere willekeurig grote L bestaat een positieve ε zodanig dat als $\xi(t)$ met zijn ρ -omgeving in D ligt voor $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ in het interval $0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}$ geldt:

$$||x(t) - \xi(t)|| < \eta.$$

Nadat Bogoljubov deze stelling bewezen had, zijn er een zeer groot aantal publicaties verschenen, waarin deze stelling of het uitgangspunt vormde of een belangrijke rol speelde. Van η weten wij alleen: $\eta = \eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ voor $\varepsilon \rightarrow 0$.

Het is nog niet bekend hoe $\eta(\varepsilon)$ er uit ziet voor het meest algemene geval (3).

Het is vaak mogelijk als wij weten hoe $X(t, x)$ van t afhangt, om η als functie van ε te bepalen. Laat nu $X(t, x)$ periodiek zijn in t met periode T . Wij zullen nu een tweetal stellingen bewijzen die aangeven hoe wij eerste en tweede orde asymptotische oplossingen kunnen konstrueren.

Wij beschouwen daartoe de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (3a)$$

$$t = 0, \quad x = x_0.$$

X en x zijn vectoren met één component. Het is eenvoudig om dezelfde stellingen voor n -dimensionale vectoren te bewijzen. Verder geldt: $X(t, x) = X(t+T, x)$. Voordat wij de stellingen formuleren en bewijzen geven wij eerst het volgende Lemma:

Lemma I: Zij $z = z(t)$ een functie zodanig dat geldt:

$$\left| \frac{dz}{dt} - \varepsilon X(t, z) \right| = O(\varepsilon^k) \quad \text{voor } 0 < t < \infty$$

en $x(t)$ voldoet aan (3a) ,
dan geldt nu:

$$|z(t) - x(t)| \leq C(L) \varepsilon^{k-1} \text{ voor } 0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon} .$$

$C(L)$ is een konstante die van de konstante L afhangt. Het bewijs is eenvoudig te geven m.b.v. het lemma van Cronwall.

Wij nemen verder aan dat $X(t, x)$ minstens driemaal continu differentieerbaar is in x

Verder stellen wij:

$$M = \sup_{x \in D} \left\{ |X|, \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right|, |X_0|, |u_1|, |u_2|, \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| \right\} .$$

Stelling I:

Beschouw de geassocieerde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad ; \quad t = 0 \quad \xi = x_0$$

waarin:
$$X_0(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt .$$

Er geldt nu:
$$|x(t) - \xi(t)| < C(L)\varepsilon \quad \text{voor } 0 \leq t \leq L .$$

Stelling II:

Beschouw de geassocieerde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) \quad ; \quad t = 0 \quad \xi = x .$$

waarin
$$P(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t, \xi) \frac{\partial X(t, \xi)}{\partial \xi} dt$$

en
$$u_1(t, \xi) = \int_0^t [X(\tau, \xi) - X_0(\xi)] d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T ds \int_0^s [X(\tau, \xi) - X_0(\xi)] d\tau - k$$

k wordt bepaald door: $u_1(0, x_0) = 0$.

Zij nu $z(t) = \xi(t) + \varepsilon u_1(t, \xi(t))$,
dan geldt:

$$|x(t) - z(t)| \leq \varepsilon^2 C(L) \text{ voor } 0 \leq t \leq L.$$

Bewijs:

Stel $x^* = \xi + \varepsilon u_1(t, \xi) + \varepsilon^2 u_2(t, \xi)$,
waarin $u_2(t, \xi)$ een nog nader te bepalen onbekende functie is.
Substitutie in (1) levert:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} - X(x^*, t) &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{du_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{du_2}{dt} - \varepsilon X(\xi + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2, t) = \\ &= \varepsilon [X_0(\xi) - X(\xi, t) + \frac{\partial u_1}{\partial t}] + \varepsilon^2 [P(\xi) + X_0(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial t} - \\ &- u_1 \frac{\partial X(\xi, t)}{\partial \xi}] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Om stelling I te bewijzen substitueren wij in deze laatste betrekking de reeds gedefinieerde waarde van u , hetgeen als resultaat heeft:

$$\frac{dx^*}{dt} - \varepsilon X(x^*, t) = O(\varepsilon^2).$$

Met behulp van lemma I volgt nu:

$$|x - x^*| < \varepsilon C(L) \text{ en daaruit}$$

$$|x - \xi| = O(\varepsilon) \text{ voor } \varepsilon t < L.$$

Om stelling II te bewijzen kiezen wij u_2 zodanig dat geldt:

$$P(\xi) + X_0(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_1 \frac{\partial X(\xi, t)}{\partial \xi} = 0$$

of na integratie:

$$u_2 = \int_0^t [u_1 \frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \xi} - P(\xi)] d\tau - \int_0^t X_0(\xi) \frac{\partial u_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau + u_2^*,$$

u_2^* wordt bepaald door: $u_2(0, x_0) = 0$.

Het is eenvoudig om in te zien dat $P(\xi)$ en u_1 zodanig gekozen zijn dat voor t geldt: $|u_2| < M$.

Met behulp van lemma I volgt nu:

$$|x(t) - z(t)| \leq \varepsilon^2 C(L) \text{ voor } 0 \leq t \leq L.$$

3. Stabiliteit van een systeem met singulier punt.

Wij beschouwen nu het geval dat het geassocieerde systeem een singulier punt heeft.

Stel er bestaat een vector ξ_0 zodanig dat $X_0(\xi_0) = 0$.

Wij kunnen ons nu afvragen hoe de oplossingen van het oorspronkelijke stelsel differentiaalvergelijkingen zich gedragen in de buurt van dit singuliere punt.

Wij zullen de volgende belangrijke stelling bewijzen:

Stelling III:

Zij $X(t, x)$ een n -dimensionale vector, die periodiek is in t met periode T . ξ_0 is een vector zodanig dat $X_0(\xi_0) = 0$. (1) heeft nu voor voldoende kleine ε een unieke periodieke oplossing met periode T die gelijkmatig voor t naar ξ_0 gaat als $\varepsilon \rightarrow 0$ mits $\det. X_{0\xi}(\xi_0) \neq 0$. Als alle eigenwaarden van de matrix $X_{0\xi}(\xi_0)$ een negatief deel hebben is deze periodieke oplossing asymptotisch stabiel. Als een der eigenwaarden een positief reëel deel heeft is de periodieke oplossing instabiel.

Bewijs:

(a) periodieke oplossing.

Laat $x = \phi(t, x_0, \varepsilon)$ een oplossing zijn van (1) zodanig dat $\phi(0, x_0, \varepsilon) = x_0$. Wij kunnen bewijzen dat $\phi(t, x_0, \varepsilon)$ continu differentieerbaar is in ε . Uit (1) volgt ook $\phi(t, x_0, 0) = x_0$.

Er geldt nu:

$$\phi(t, x_0, \varepsilon) - x_0 = \varepsilon \int_0^1 \frac{\partial \phi(t, x_0, \theta \varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\theta = \varepsilon \phi^*(t, x_0, \varepsilon)$$

zodat:

$$\phi(t, x_0, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon \phi^*(t, x_0, \varepsilon) . \quad (4)$$

Het is duidelijk dat:

$$\phi^*(0, x_0, \varepsilon) = 0 . \quad (5)$$

Substitutie van (4) in (1) levert:

$$\frac{d\phi^*}{dt} = X(t, x_0 + \varepsilon \phi^*,) \quad (6)$$

ϕ^* is een oplossing van (6) met beginvoorwaarde (5).

De noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat $x = \phi(t, x_0, \varepsilon)$ periodiek is in t met periode T , is

$$\phi(T, x_0, \varepsilon) = \phi(0, x_0, \varepsilon) = x_0 \quad (7)$$

De noodzakelijke voorwaarde is evident. Wij bewijzen de voldoende voorwaarde als volgt:

$X = \phi(t, x_0, \varepsilon)$ is een oplossing van (1) d.w.z.

$$\frac{d\phi(t, x_0, \varepsilon)}{dt} = \varepsilon X(t, \phi(t, x_0, \varepsilon))$$

Verder geldt:

$$\frac{d\phi(t+T, x_0, \varepsilon)}{dt} = \varepsilon X(t+T, \phi(t+T, x_0, \varepsilon)) = \varepsilon X(t, \phi(t+T, x_0, \varepsilon))$$

Dit betekent dat $\phi(t+T, x_0, \varepsilon)$ ook een oplossing is van (1).

Voor $t = 0$ hebben de beide oplossingen dezelfde beginvoorwaarde (7).

Uit de eenduidigheidsstelling volgt nu dat de beide oplossingen identiek zijn. Hieruit volgt verder dat $\phi(t, x_0, \varepsilon)$ periodiek is in t met periode T , waarmee de voldoende voorwaarde is bewezen.

Uit (4) en (7) kan men concluderen dat

$$\phi^*(T, x_0, \varepsilon) = 0 \quad \text{als } \varepsilon \neq 0. \quad (8)$$

(8) is een vectorvergelijking met als onbekende x_0 .
Daar ϕ^* continu in ε is heeft (8) geen oplossing voor kleine $|\varepsilon|$ als de vergelijking

$$\phi^*(T, x_0, 0) = 0 \quad (9)$$

geen oplossing heeft.

Uit (6) en (5) volgt:

$$\phi^*(T, x_0, 0) = \int_0^T X(t, x_0) dt = TX_0(x_0) . \quad (10)$$

(9) is dus gelijkwaardig met

$$X_0(x_0) = 0 . \quad (11)$$

Wij zien dus dat (8) geen oplossing heeft voor voldoende kleine $|\varepsilon|$ als (11) geen oplossing heeft. Dit betekent dat als het geassocieerde systeem geen singulier punt in D heeft, (1) geen periodieke oplossing heeft met periode T voor voldoende kleine $|\varepsilon| > 0$.

Stel er bestaat nu een vector ξ_0 waarvoor $X_0(\xi_0) = 0$ en $\det. X_{0\xi}(\xi_0) \neq 0$.
Uit (10) volgt:

$$\phi^*(T, \xi_0, 0) = 0 . \quad (12)$$

Ook geldt:

$$\det. \phi_{\xi}^*(T, \xi_0, 0) \neq 0$$

Uit de stelling van de implicietefuncties volgt nu dat (8) voor voldoende kleine $|\varepsilon|$ een unieke oplossing $x_0 = x_0(\varepsilon)$ heeft zodanig dat $x_0(0) = \xi_0$ terwijl $x_0(\varepsilon)$ continu differentieerbaar is in ε .
Hieruit volgt dat (1) een unieke periodieke oplossing

$$x = x_0(\varepsilon) + \varepsilon \phi^*(t, x_0(\varepsilon), \varepsilon)$$

heeft met periode T in de omgeving van $x = \xi_0$ mits $|\varepsilon| \neq 0$ en $|\varepsilon|$ voldoende klein.

(b) Stabiliteit van de periodieke oplossing.

Zij $P^*(t)$ een matrix met elementen $\left. \frac{\partial X_i(t, x)}{\partial x_j} \right|_{x = \xi_0}$

en S een matrix met elementen $\left. \frac{\partial X_{oi}(\xi)}{\partial \xi_j} \right|_{\xi = \xi_0}$.

Als $x_p = x(t, \varepsilon)$ een periodieke oplossing met periode T van (1) is, dan kunnen wij de lineaire variatie-vergelijkingen met periodieke coëfficiënten als volgt schrijven:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon P y \quad (13)$$

waarin P de matrix $\left. \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \right|_{x = x_p}$ is.

Lemma II:

De periodieke oplossing x_p is asymptotisch stabiel voor $t \rightarrow +\infty$ als $y = 0$ zelf een asymptotisch stabiele oplossing is van (13).

Bewijs: Zie Roseau[1] blz. 94.

Wij zullen aantonen dat als alle eigenwaarden van S een negatief reëel deel hebben er een $\varepsilon^* > 0$ bestaat zodanig dat als $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $y = 0$ en dientengevolge x_p asymptotisch stabiele oplossingen van resp. (1) en (13) zijn. Als tenminste een der eigenwaarden van S een positief reëel deel heeft dan zijn $y = 0$ en x_p instabiele oplossingen.

$$P = P(t, \varepsilon) = P(t+T, \varepsilon) \rightarrow P^*(t) \text{ als } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ gelijkmatig voor } t.$$

Er geldt:

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T P^*(t) dt.$$

Wij definiëren nu de matrix $H(t)$ volgens

$$H(t) = \int_0^t [P^*(\tau) - S] d\tau,$$

periodiek in t met periode T , continu in t en begrensd.

De matrix $K(t) \stackrel{\text{def}}{=} I - \epsilon H(t)$ heeft een inverse

K^{-1} voor $0 \leq \epsilon \leq \delta$. Zowel K^{-1} als $K(t)$ zijn weer periodiek in t met periode T en begrensd.

Stelsel (13) is equivalent met:

$$(14) \quad (I - \epsilon H) \frac{dy}{dt} = \epsilon (I - \epsilon H) P \cdot y = \epsilon P y - \epsilon^2 H P y$$

Tevens geldt:

$$\frac{dH}{dt} = P^*(t) - S. \quad (15)$$

Wij beschouwen nu:

$$\frac{d}{dt} [y - \epsilon H y]$$

Deze vector is gelijk aan:

$$(I - \epsilon H) \frac{dy}{dt} - \epsilon \frac{dH}{dt} y.$$

Substitutie van (14) en (15) hierin levert:

$$\frac{d}{dt} [y - \epsilon H y] = \epsilon S [y - \epsilon H y] + \epsilon^2 \{S H - H P\} y + \epsilon (P - P^*) y$$

Stel $y - \epsilon Hy = z$.

Er volgt dan:

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon S z + \epsilon \frac{\epsilon [SH-HP] + [P-P^*]}{[I-\epsilon H]} z = \epsilon S z + \epsilon \sum z$$

$\sum$ is weer een matrix die periodiek is in t met periode T .

Verder geldt: $\Gamma(\epsilon) = \sup_t ||\sum|| \rightarrow 0$ als $\epsilon \rightarrow 0$

Wij beschouwen nu de vergelijking:

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon(\delta + \sum) z$$

Toepassing van een tweetal stellingen, die hier niet bewezen worden zie [1], heeft nu als resultaat: Als alle eigenwaarden van S een negatief reëel deel hebben dan is $z = 0$ en diens gevolg $y = 0$ een asymptotisch stabiele oplossing. Als tenminste één der eigenwaarden een positief reëel deel heeft is $z = 0$ en dus $y = 0$ een instabiele oplossing.

Deze stellingen gelden alleen als er een ϵ^* bestaat zodanig dat voor $0 < \epsilon < \epsilon^*$ $\Gamma(\epsilon)$ begrensd is,

dus: $\Gamma(\epsilon) = \sup_t ||\sum|| < n$.

Literatuur

- [1] M. Roseau
Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité 1966,
Springer-Verlag.
- [2] N.N. Bogoljubov & J.A. Mitropolski
Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen
Schwingungen.
1965
- [3] M. Urabe Nonlinear autonomous oscillations
1967.

Errata

van boven = v.b.

van beneden = v.o.

pag. regel

moet zijn:

1 15.v.o. vergelijking $y' = \varepsilon f(t, y; \varepsilon)$, $f(t, y; \varepsilon) = \dots$

6 9.v.b. $y' = \frac{x_1 - x_2}{2}$

8 3.v.o. en $\frac{1}{2} \left\{ \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^2$
1.v.o. $x_j = x_j^*$

13 7.v.o. stabiliteit is $\operatorname{Re}(h_p) < 0$
6.v.o. $h = \max_p \operatorname{Re}(h_p)$.

16 1.v.b. 1. Samenvatting

17 0.v.b. 17

20 (2b') $\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^x \Gamma(y, \phi) \frac{d\phi}{\gamma(y)} \right\} = \omega^{(0)}(y, x) [1 + \varepsilon W^{(1)}(y) + \dots]$.

22 9.v.o. ...K.B.M-methode gebruikt na

26 3.v.b. $\frac{dx}{dt} = \omega A(t) \cos \psi(t)$

27 7.v.b. $F'(z) = \frac{-1}{\Pi} \int_0^z f(y^{\frac{1}{2}}) (z-y)^{-\frac{1}{2}} dy$

10.v.b. $f(z^{\frac{1}{2}}) = -Z^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \int_0^z F'(y) (z-y)^{-\frac{1}{2}} dz$

29 10.v.b. $Fe = -\{k_l(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt}\}; k_l = k_e - k.$

pag. regel

moet zijn:

35 9 en 7.v.o. $x_1 = F_1(t, t_0, x_0) = \dots$ en $x_2 = F_2(t, t_0, x_0) = \dots$

39 3.v.b. $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ en $|g'(t)| < R$ voor $t \geq \delta$.

9.v.b. $k\left\{\frac{|x_0|}{g(t_0)}\right\} g(u) \leq k_1\{|x_0|\} \cdot k_2\{g(u)\}$

6.v.o. $\lim_{t \rightarrow \infty} p'(t) = 0$.

44 11.v.o. Ann. of Math. vol.50 (1949) blz. 705-721.

74 (N.H.) $x = A(t)x + b(t),$

75 7.v.b. $R^{-1}(t, t_0) = R(t_0, t); \dots$

(2) $x(t) = R(t, t_0)c + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$

79 7.v.o. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ stelt.....

6.v.o. $I = [0, T]$ in $\mathbb{R}^n$

5.v.o. van $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ die....

80 4.v.b. $\mathcal{B}_r = \{x = (x^2, \dots$

81 1.v.b. $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right);$

$$\|A\|_2 \leq \left(\sum_{i,j} (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

82 3.v.b. is $h = g \circ f$ een volcontinue operator

85 5.v.o. $\|b(u_2, t) - b(u_1, t)\| \leq L(r) \|u_2 - u_1\|.$